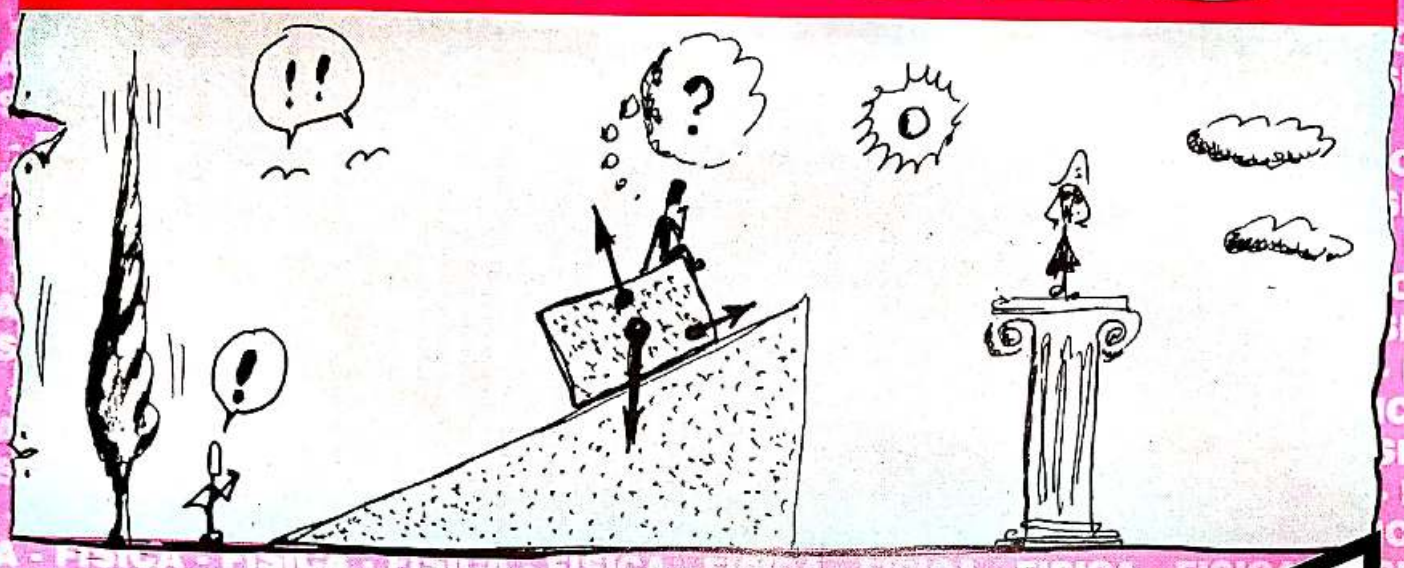
UBA - CBC



FÍSICA

TEORÍA

EJEMPLOS

Escaneado con CamScanner

FISICA

CBC - UBA

Agustín Rela

Liliana Reynoso

ANEXO DE MATEMATICA
Horacio Cassia

DISEÑO DE TAPA
Agustín Rela

DISEÑO GRAFICO
Liliana Reynoso

La primera versión de este material fue realizada en 1985 por Profesores de Física de U.B.A. - C.B.C.

Jorge H. Abeledo
Clara Braghiroli
Daniel E. Di Gregorio
Juan Carlos Fernández
Augusto O. Macchiavelli
Agustín Rela
Liliana Reynoso
Hugo Sirkin

Escaneado con CamScanner

© 2004 Ediciones Villoldo Yanele
Villoldoyanele@yahoo.com.ar - Cel. (15) 4045-8326
Primera edición marzo de 2004
Reimpresión marzo de 2014 en Artes Gráficas Leo,
Remedios de Escalada 3152, Valentín Alsina, Provincia de Buenos Aires

Todos los derechos reservados
Hecho el depósito que marca la ley 11.723
ISBN: 987-21295-1-7

Prohibida la reproducción total o parcial de este trabajo, su almacenamiento en sistema informático, su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia u otros métodos sin el permiso del editor.

Para tener información sobre la cátedra, los alumnos pueden consultar en la dirección: www.fisicacbc.org y e-mail: fisicacbc@fisicacbc.org y fisica@cbc.uba.ar

Escaneado con CamScanner

A LOS ALUMNOS:

NOTA PREVIA

VIDA UNIVERSITARIA

CONSEJOS PRACTICOS

EL ESTUDIO

LAS CLASES

LA TOMA DE NOTAS Y APUNTES

EXAMENES

NOTA PREVIA

Probablemente Ud. se inscribió en Física porque le interesa, o porque piensa estudiar una carrera que necesita de la Física. Pero también es probable que a Ud. no le interese este tema en absoluto, y que se haya inscripto por obligación, porque la carrera que Ud. seguirá impuso esta asignatura como obligatoria. Si tal es su caso, encontrará dificultades de muy difícil solución. Para encararlas lo invitamos a reflexionar sobre la posibilidad de que el desinterés o rechazo obedezca a experiencias poco felices con profesores poco didácticos y metodología rutinarias. Aquí comenzaremos desde cero, no daremos nada por sabido. Ud estará en las mismas condiciones iniciales que los alumnos aventajados. A todos (aventajados, con dificultades y casos perdidos) les hacemos una propuesta de movilización mental y profundización. Estudiarán temas de Física, y cuando crean haberlos comprendido perfectamente, se encontrarán frente a ejercicios, preguntas y problemas que les mostrarán que lo que parecía fácil no lo es tanto; que el estudio superficial y memorístico no tiene ninguna utilidad, que hay que volver sobre lo estudiado y profundizarlo más, hasta tener la satisfacción de haber comprendido realmente. Si después de este esfuerzo y haber aprobado la materia Ud. decide seguir una carrera cuya especialidad esté desconectada de la Física, no habrá perdido su tiempo: lo habrá empleado en una de sus mejores formas, que es en la adquisición de buenas prácticas de estudio.

VIDA UNIVERSITARIA

Estudie con seriedad y empeño 8 horas diarias, netas; es lo mínimo que un profesional dedica a su trabajo. Y por épocas mucho más. No alcanza con el mero asistir y estudiar un poco antes de los exámenes; ahora el estudio pasa a ser una parte de las más importantes de su vida.

No descalifique temas por su supuesta lejanía con su campo de interés ("No me interesa qué ocurre con el peso de un cuerpo en órbita, porque estudiaré odontología, y trabajaré en la tierra."). El problema astronómico opera en este curso como un instrumento y no como un fin. Es como la gimnasia, que nos hace correr sin que tengamos que ir a ningún sitio.

Escaneado con CamScanner

CONSEJOS PRACTICOS

Si está leyendo algo y se traba en un punto, no se quede ahí, siga leyendo, ya lo entenderá después.

No tema dedicar demasiado tiempo a un mismo problema. No importa si le falta resolver alguno, porque siempre habrá problemas sin resolver; no se terminan. Vale más la profundidad que la cantidad. Agote las posibilidades de un problema.

Trate de entender, se puede estudiar mucho y no entender nada.

EL ESTUDIO

Los resultados que obtenga dependen principalmente del tiempo que usted destine a trabajar solo o en pequeños grupos, estudiando y resolviendo problemas, con escasas consultas. La calidad de los profesores no será suficiente si Ud. no se empeña seriamente en aprender.

No es obligación comprar libros, pero sí debe tener el material impreso del curso, el que podrá compartir con compañeros que tengan los mismos horarios y vivienda. Consulte de vez en cuando la bibliografía sugerida, más los libros que usted tenga.

Use nuestro idioma; no se limite a encadenar fórmulas. Escriba la explicación; si no tiene ese hábito, desarróllelo practicando la redacción de sus consultas y dudas. Lea lo que escribe, y comprobará con sorpresa que lo que quedó escrito no es lo que quiso escribir. Dé a leer lo suyo a otras personas y escuche sus observaciones.

Resuelva los problemas en cualquier orden, use lápiz o tinta de cualquier color, copie o no los enunciados, tache o borre, trabaje según su preferencia, sólo le pedimos que su trabajo sea claro para Ud., y para quien deba leerlo.

La respuesta correcta a una pregunta casi nunca se parece a una frase conocida. Por eso ante una pregunta, lo mejor que puede hacerse es tratar de entenderla y luego responderla con sinceridad. No haga lo que muchos, que, ante una pregunta, anotan a modo de respuesta todo lo que encuentran en sus libros, apuntes y memoria que les parece que tiene que ver. Así no acertarán ni por casualidad, la respuesta no está en el libro. Está en el razonamiento suyo.

Conteste las preguntas y resuelva los problemas antes de que lo haga el profesor. Ya sabemos que si lo hace después quedarán mejor resueltos. Pero lo que interesa no es que la solución quede lo mejor posible; lo que importa es que sea Ud. quien la halle. La clave es su esfuerzo continuado. Cuando no pueda avanzar entonces sí consulte.

No pregunte sobre ambigüedades o imprecisiones de los enunciados ("Señor en el problema 5, ¿Es con rozamiento o sin rozamiento?"). Si el enunciado es vago, escriba: "No dice si debe considerarse el rozamiento, analizaré ambas posibilidades. Supongamos...". Con esto Ud. obtiene dos ventajas: por una parte se habitúa a no responder reglas de juego arbitrarias; lo que se mide es su avance en el razonamiento, no su habilidad para obedecer órdenes. En segundo lugar: así vagos e imprecisos se presentan los problemas al profesional, y parte de su tarea es aclarar las preguntas.

Escaneado con CamScanner

LAS CLASES

Pida ayuda al docente, pero no reclamando que le diga cómo se resuelve un problema, sino mostrándole cuál fue su intento de resolución. Se lo comentará y se lo corregirá (o se lo devolverá por ininteligible).

Anote los nombres y apellidos de sus docentes, el número de su comisión, aula y el horario de sus materias. Tendrá importancia para resolver posibles problemas de pérdidas de información suya o nuestra.

LA TOMA DE NOTAS Y APUNTES

Muchos acostumbran oír lo que dice el profesor, sin anotar nada, pero copian cuidadosamente lo que el profesor escribe en el pizarrón, aunque sólo sean trazos sueltos. Consecuencia: sus notas no le servirán. Prefiera permanecer atento a lo que dice y escribe el profesor; para verlo en detalle están los libros. Anote, sí, lo que usted querría decir, sus dudas, sus preguntas, sus recordatorios; use abreviaturas. No deje pasar el tiempo y que se le olvide que quiso anotar con sus abreviaturas; trabaje con ellas apenas terminada la exposición.

EXAMENES

No se angustie por los exámenes. No está en juego la vida ni el futuro: a lo sumo un período. Tómelo como parte del estudio. Durante su transcurso no consulte ni responda consultas, para no falsear resultados. Escriba claro, dibuje grande, responda con sinceridad, explique sus respuestas.

Existe una tendencia muy generalizada a copiarse en un examen. Ud., probablemente sentirá el impulso de copiarse o permitir que alguien se copie de Ud. como esa tendencia es muy pronunciada, deberá hacer un considerable esfuerzo para evitarlo. La imitación de la conducta fue uno de los pilares de la transmisión de conocimientos, y en algunas especies de animales esa imitación está directamente relacionada con su supervivencia. Sin embargo, en esta etapa universitaria de estudios , los conceptos que debe adquirir no se pueden adquirir por imitación.

Se agradecen las propuestas, críticas y sugerencias. Envíelas a U.B.A. - C.B.C. FISICA, Pab. III Dto. V; Ciudad Universitaria.

Serán atendidas y respondidas.

Agustín Rela.

Liliana Reynoso.

Escaneado con CamScanner

BIBLIOGRAFIA

En este curso de Física no habrá bibliografía obligatoria. Le bastará con recurrir al material elaborado por los Profesores.

Sin embargo, es posible que sienta la necesidad de afirmar o profundizar los conocimientos que irá adquiriendo. Quizá le interesen las vinculaciones de la Física con otras disciplinas científicas (la química, la biología, por ejemplo), indagar acerca de su historia o reflexionar sobre el impacto en la sociedad de la ciencia y la tecnología y sus implicaciones éticas. Para esta variedad de posibles intereses ofrecemos las siguientes sugerencias bibliográficas, en las que no faltan algunas aventuras de la especulación científica en el ámbito de la literatura.

TEXTOS ELEMENTALES DE FISICA

Blackwood, O.; Kelly, W. y Bell, R.: **Física General**; México, Continental.

Gintel y Rojo: **Elementos de Física**.

Maiztegui, A. y Sabato, J.: **Introducción a la Física**, Tomo I; Buenos Aires, Kapelusz.

P.S.S.C.(Physical Science Study Committee): **Física**, Barcelona; Reverté.

Para su lectura sólo se requiere el conocimiento de matemática básica en el nivel de la enseñanza media.

OTROS TEXTOS DE UTIL CONSULTA

Quintana, G. y Romera Carrión, C.: **Manual del Ciclo Básico** y **Manual de Ingreso Universitario**; Buenos Aires, Nueva Librería.

Castiglioni, Perazzo, Alejandro Rela: **Física**; Buenos Aires, Troquel.

Giambiaggi y Bollini: **Física**; Buenos Aires, Edicien Editores.

Fernandez y Galloni: **Física**; Buenos Aires, Nigar.

TEXTOS DE FISICA MAS AVANZADOS

Elsberg y Lerner: **Física, fundamentos y aplicaciones**, Vol I; Mac Graw-Hill, Buenos Aires.

Halliday y Resnick: **Física**, Tomo I; México, C.E.C.S.A.

Sears y Zemansky: **Física General**; Madrid, Aguilar.

Tipler, P.: **Física**, Tomo I; Buenos Aires, Reverté.

Su lectura requiere, aunque no siempre, nociones de cálculo diferencial e integral.

TEXTOS INTERDISCIPLINARIOS

Kane y Sternhem: **Física**; Barcelona, Reverté.

Aplicaciones de la Física a las ciencias biológicas y a la medicina.

Lange, V. N.: **Problemas Experimentales Ingeniosos de Física**; Moscú, Mir.

Se presentan 132 problemas de medición que desafían la inventiva y el ingenio, se proponen igual cantidad de pistas o ayudas y por fin las respuestas detalladas, con nuevos problemas.

Escaneado con CamScanner

DIVULGACION CIENTIFICA:

Todos los textos interdisciplinarios citados contienen importantes aportes a la divulgación científica general, a ellos agregamos específicamente:

Asimov, I.: **Introducción a la ciencia**; Barcelona; Plaza.

Un compendio de nuestro conocimiento actual del mundo físico, escrito por un gran divulgador de la ciencia y maestro de la buena ciencia ficción.

Asimov, I.: **Cien preguntas básicas sobre la Ciencia**; Madrid, Alianza.

Es una recopilación de respuestas a preguntas de lectores de una revista de divulgación. Hay problemas de arqueología, astronomía, Física, computación y biología. No hay fórmulas.

FUENTES ORIGINALES

Babini, J.: **Galileo**; Buenos Aires, Centro editor de América Latina.

Antología de textos del gran físico italiano, con un estudio preliminar a cargo del compilador. En un buen resumen de la obra de Galileo que incluye temas físicos, astronómicos, filosóficos, teológicos y de política científica.

Galilei, G.: **Diálogos acerca de dos Nuevas Ciencias**; Buenos Aires, Losada.

La obra fundamental de Galileo, cuyas jornadas tercera y cuarta constituyen el basamento de la mecánica moderna. Hay fragmentos (dialogados) que no han sido superados en claridad y rigor.

Newton, I.: **El sistema del Mundo**; Madrid, Alianza.

Exposición popular en la cual Newton da a conocer sus ideas fundamentales sobre gravitación, el movimiento de la luna y el fenómeno de los cometas.

CIENCIA CULTURA Y SOCIEDAD

Snow, C.: **Las dos culturas y un segundo enfoque**; Madrid, Alianza.

Libro clásico en el que el autor, físico y novelista, analiza los encuentros y desencuentros de los especialistas en ciencias y en humanidades.

CIENCIA E IMAGINACION

Calvino, I.: **Las cosmicómicas**; Buenos Aires, Sudamericana.

Calvino, I.: **Tiempo cero**; Buenos Aires, Sudamericana.

A partir de respetables enunciados científicos, el narrador italiano desarrolla pintorescos relatos plenos de imaginación y humor.

Clarke, A.: **Cita con rama**; Buenos Aires, Emecé.

El abordaje de una gigantesca nave extraterrestre (en la que se manifiestan variados efectos dinámicos de su rotación) es el inicio de un atractivo relato.

Escaneado con CamScanner

PROGRAMA

CINEMATICA

Sistema de coordenadas espaciales de referencia, descripción del movimiento de una partícula: posición, velocidad, aceleración, tiempo. Tratamiento vectorial. Representaciones gráficas. Velocidad media e instantánea. Trayectoria. Movimiento rectilíneo uniforme. Movimiento curvilíneo uniforme. Movimientos rectilíneos uniformes relativos. Problemas de encuentro en la recta y en el plano. Movimiento rectilíneo uniformemente variado. Tiro (caída libre, vertical y oblicuo) en el vacío. Aceleración centrípeta y tangencial. Movimiento circular uniforme. Movimientos curvilíneos variados.

DINAMICA

Principio de inercia. Principio de masa. Principio de interacción (las Leyes de Newton). Diferentes tipos de interacción: elástica, gravitatoria, otras. Tratamiento de Mach. Problemas de dinámica de la partícula: plano inclinado, fuerza de rozamiento. Fuerza tangencial y centrípeta, dinámica del movimiento circular uniforme. Ejemplos de laboratorio y casos de gravitación con órbitas circulares. Ley de gravitación. Masa inercial y masa gravitatoria. Casos más generales de movimientos y estudio cualitativo de sus fuerzas: órbitas no circulares, péndulo, movimiento oscilatorio. Principio de relatividad de Galileo. Sistemas inerciales y no inerciales.

ESTATICA

Equilibrio de una partícula. Particularización de las leyes dinámicas para el caso estático de la partícula. Condiciones de equilibrio. Composición y descomposición de fuerzas. Fuerzas de vínculo. Equilibrio de sistemas de partículas. El cuerpo rígido considerado como un caso particular de sistemas de partículas. Otros sistemas de partículas no rígidos. Condiciones de equilibrio del cuerpo rígido: cuplas, momento de una fuerza y de un sistema de fuerzas. Equilibrante. Resultante. Equilibrio de cuerpos suspendidos y apoyados. Centro de gravedad. Máquinas simples: palanca, polea, balanza, torno, plano inclinado, aparejos. Trabajos virtuales.

ENERGIA

Trabajo de una fuerza. Energía cinética. Energía potencial. Potencia. Unidades más frecuentes. Energía mecánica y principio de conservación de la energía: química, eléctrica, térmica, ejemplos de transformación. Potenciales elásticos y gravitatorios. Impulso y cantidad de movimiento. Choques elásticos inelásticos y plásticos en una y dos dimensiones.

Escaneado con CamScanner

UNIDAD 1 CINEMATICA

CAPITULO 1 CINEMATICA VECTORIAL

CONCEPTOS GENERALES

1.1 INTRODUCCION

Muchas veces nos interesa observar el movimiento de un cuerpo globalmente, sin tener en cuenta los movimientos relativos de unas parte con relación a otras. Por ejemplo:

- El vuelo de un insecto sin tener en cuenta el batir de sus alas.
- El movimiento de un satélite sin notar si está o no rotando.
- El desplazamiento de un tren sin fijarnos en el giro de las ruedas, o en que alguien está bajando una ventanilla, o en que las agarraderas colgantes se sacuden.

Esto puede deberse a que no nos interesa la descripción detallada, o a que el cuerpo está tan distante o es tan pequeño que no podemos apreciar estos detalles. En cualquiera de estos casos diremos que consideraremos al cuerpo como una ***partícula***, lo que equivale a visualizarlo como si ocupase un punto en el espacio. A veces en lugar del término **partícula** se usa **cuerpo puntual** o **punto material** con el mismo significado. En lo que sigue no debemos olvidar que aunque a veces lo representemos por medio de un punto, la partícula que estudiamos puede ser, por ejemplo: un átomo, un avión o un planeta (no es una cuestión de tamaño).

Decimos que una partícula **se mueve** si la vemos cambiar de lugar, es decir si ocupa distintas ***posiciones*** en distintos ***instantes***. Entonces, la idea de movimiento relaciona los conceptos de ***espacio*** y ***tiempo***. Antes de entrar de lleno en el estudio del movimiento, conviene que nos detengamos en la descripción de las posiciones que ocupa la partícula en el espacio, por un lado y de los instantes en que lo hace por el otro.

1.2 POSICIONES E INSTANTES

Para describir la posición es preciso referirla a algo, por ejemplo:

- 20 pasos adelante y 10 a la derecha de donde Ud. está ahora.
- La tercera butaca de la quinta fila.
- A 25 m de la puerta de la habitación, en dirección NE.

Nosotros diremos que usamos un ***marco de referencia****. Un marco de referencia habitual para nosotros suele ser nuestro planeta Tierra; puede ser también un tren en movimiento, las llamadas estrellas fijas, etc. Pero para poder fijar un punto necesitamos incorporar un ***sistema de ejes coordenados***.

** Si usted necesita información sobre este tema o de vectores, gráficos y sistemas de coordenadas; consulte el Apéndice de Matemática.*

Escaneado con CamScanner

En el espacio serán, en general, tres ejes; por ejemplo:

- Un eje hacia el Este, otro hacia el Norte y otro hacia arriba.
- Ejes paralelos a las ariatas de la abitación

y además es necesario señalar un punto del marco de referencia como origen de coordenadas, por ejemplo:

- Monolito de la plaza de los Dos Congresos.

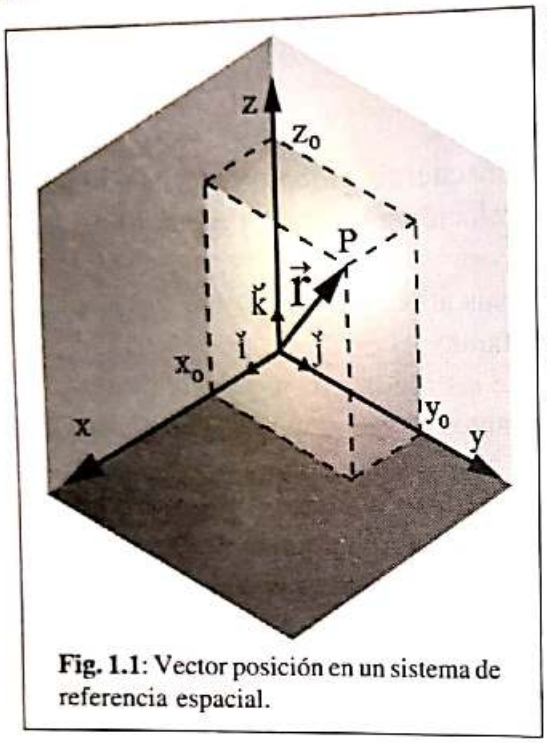


Fig. 1.1: Vector posición en un sistema de referencia espacial.

Una vez que tenemos nuestro marco de referencia completo, queda identificado cualquier punto del espacio y por lo tanto la ***posición*** de cualquier partícula, por medio de tres números (sus coordenadas). O bien conociendo su ***vector posición*** $\vec{r}$. Este es el vector que parte del origen de coordenadas y llega el punto que se quiere identificar. Sus componentes son precisamente las coordenadas de dicho punto.

La expresión vectorial de $\vec{r}$ en el sistema de referencia de la **Fig. 1.1** es:

$$\vec{r} = r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k}$$

en la cual $r_x\mathbf{i}$, $r_y\mathbf{j}$, $r_z\mathbf{k}$ son las componentes vectoriales; r_x, r_y, r_z las componentes escalares que de ahora en adelante serán x, y, z.

También para identificar un instante debemos saber a qué referirlo:

- Trescientos años antes de Cristo.
- Dentro de dos horas.
- Cuenta regresiva en un lanzamiento espacial.

Acá nos bastará con fijar un origen en el tiempo e identificar los instantes por un número que indicará cuantos segundos (minutos, horas) después de este origen (si el número es positivo) o antes (si es negativo) tiene lugar el instante que queremos identificar. A este número lo llamamos coordenada temporal **t**.

1.3 DESCRIPCION DEL MOVIMIENTO

Ahora podemos volver a considerar nuestra partícula, y estudiar las posiciones que va ocupando en distintos instantes. Si nos interesa hablar sólo de las posiciones que ocupó el móvil, prescindiendo de (o agregando más tarde) la información sobre en qué instantes pasó por cada una de ellas, hablaremos de la ***trayectoria***: curva que el móvil recorrió al desplazarse. Pero para el estudio completo del movimiento debemos relacionar posiciones

Escaneado con CamScanner

e instantes. Es intuitivo afirmar que la partícula debe ocupar una y sólo una posición en cada instante (en física microscópica, sin embargo, esta afirmación no puede considerarse válida); aunque sí puede ocupar en varios instantes la misma posición. Esto nos lleva a decir que, en el movimiento de una partícula, a cada **t** debe corresponder un $\vec{r}$ (o que $\vec{r}$ es una función de **t**). Cuando haga falta explicitar esto escribiremos $\vec{r}(t)$ en vez de $\vec{r}$, o diremos $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Por supuesto, esto abarca tanto a los casos de movimiento estricto (a distintos **t**, distintos $\vec{r}$) como a los casos en que la partícula no se mueve, ya que estos están incluídos dentro de la descripción general del movimiento.

Cada movimiento en particular corresponde entonces a una determinada función $\vec{r}(t)$. Dicho de otro modo, conocer la función $\vec{r}(t)$ es conocer el movimiento que hace la partícula que estudiamos, es decir, conocer en qué lugar estuvo en cada instante.

Pueden imaginarse varias formas de expresar cómo varía el vector $\vec{r}$ a medida que pasa el tiempo. Una de ellas sería representarlo como en la **Fig. 1.1**, con una colección de dibujos que lo muestre con los distintos tamaños y orientaciones para cada instante. Otra forma es una tabla de entrada simple (el valor del tiempo), que suministre como salidas los valores de sus componentes escalares x, y, z. Si se trata de un movimiento en el plano, bastará con una columna para el tiempo **t** y dos para las componentes de $\vec{r}$.

t(s)	x(m)	y(m)
0	1.0	2.0
1	1.2	2.1
2	1.4	2.2
3	1.5	2.2
4	1.6	2.1
5	1.8	2.0

Tabla A: Coordenadas del móvil para algunos instantes.

El inconveniente de este tipo de tablas es que no nos dan las posiciones en ***todos*** los instantes. ¿Dónde estaba el móvil en t = 2,5 s?. Quizás haya estado en x = 1,4 m, y = 2,2 m; pero pudo haber estado en x = 1,4 m, y = 2,3 m, o en infinidad de otras posiciones, y la tabla *no nos lo dice*.

Una forma alternativa son los gráficos; para el movimiento correspondiente a la **Tabla A** es el de la **Fig. 1.2**, la curva representa una de las posibles trayectorias, y sobre la misma están indicados los instantes en que la partícula pasó por las posiciones determinadas en la tabla.

Este gráfico todavía no nos dice exactamente dónde estuvo el móvil en cada instante, salvo los explícitamente indicados; pero al menos un gráfico de este tipo nos da una idea visual de los posibles lugares que el móvil recorrió. Más completa es la información que nos dan los gráficos siguientes, que muestran la evolución de cada coordenada por separado (nuevamente utilizamos los valores consignados en la **Tabla A**).

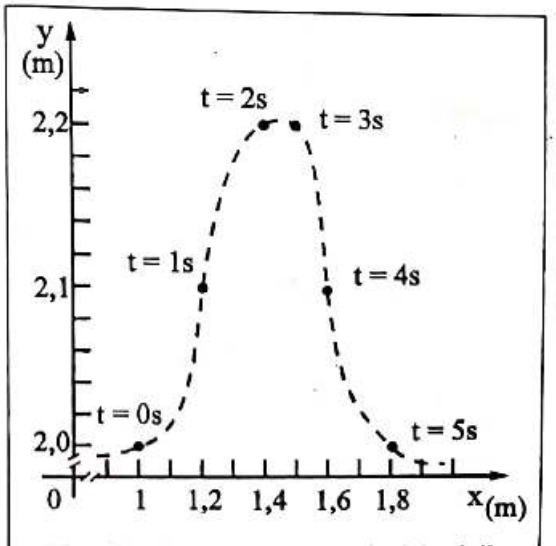


Fig.1.2: Una posible trayectoria del móvil.

Escaneado con CamScanner

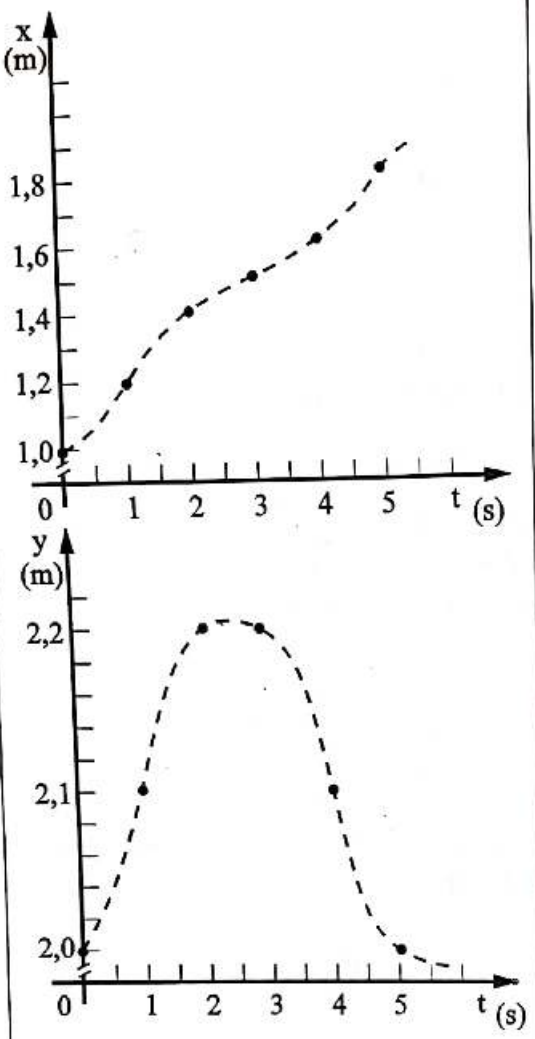


Fig. 1.3: Gráficos de la evolución temporal de las coordenadas x e y.

Acá no vemos la trayectoria (para ello debemos recurrir a gráficos como los de la **Fig. 1.2**) pero en cambio nos permiten tener una idea de cómo se desarrolla el movimiento en el tiempo (unimos los puntos obtenidos de la Tabla A con líneas de trazos discontinuos, porque no tenemos más información que la que suministra dicha tabla).

Si queremos hacer un tratamiento más detallado del movimiento, necesitaremos una forma numérica de conocer la posición en cada instante; eso se hace en general por medio de expresiones matemáticas que vinculan las coordenadas espaciales x, y, z con la coordenada temporal t (es decir, funciones matemáticas x(t), y(t), z(t) que suministren los valores de x, y, z para cualquier valor del tiempo t; las líneas de los gráficos serán entonces de trazo continuo). Por ejemplo, podremos considerar expresiones del tipo:

$x(t) = 3t + 2$
$y(t) = 5t^2 - 2t + 4$
$z(t) = 5$

o bien

$x(t) = 5\ \cos(3t)$
$y(t) = 5\ \text{sen}(3t)$

o bien: $x(t) = 4 + 6(t - 2) + 3(t - 2)^2$; etc.*

1.4 DESPLAZAMIENTOS Y LAPSOS. VELOCIDAD MEDIA

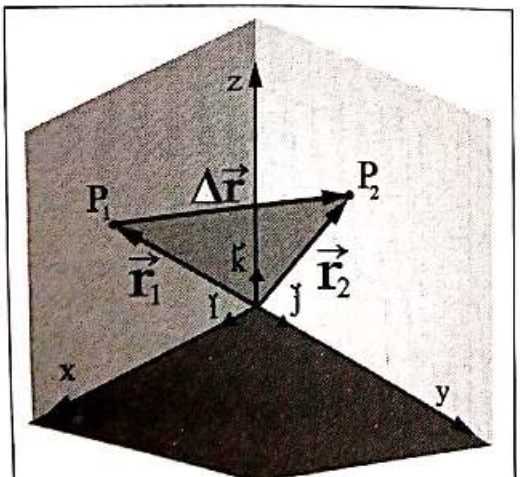


Fig. 1.4: Vector desplazamiento.

Si la partícula en un cierto tiempo se mueve del punto P_1 (vector posición $\vec{r}_1$) al punto P_2 (vector posición $\vec{r}_2$) llamamos ***vector desplazamiento*** al que tiene origen en P_1 y extremo en P_2 (ver **Fig. 1.4**)

Debemos notar que en la definición de vector desplazamiento sólo intervienen el punto de partida y el de llegada: es decir, es independiente del camino recorrido realmente por el móvil. Este vector es el vector diferencia entre los vectores posición del punto P_1 y el punto P_2. Lo indicaremos con la notación:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

*Aquí se ha prescindido de las unidades, para no oscurecer la exposición; en general hay que tenerlas en cuenta muy cuidadosamente, para poder operar con este tipo de ecuaciones (ver Unidad 0, Apéndice matemático).

Escaneado con CamScanner

Análogamente llamaremos ***lapso*** o ***intervalo temporal*** al tiempo transcurrido entre los instantes en que el vector posición del móvil es $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_1$, respectivamente, y lo indicaremos Δt, tal que:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Si establecemos que siempre restaremos el instante anterior del posterior, Δt nunca podrá tomar valores negativos. En cuanto a $\Delta\vec{r}$, no es ni positivo ni negativo: es un vector.

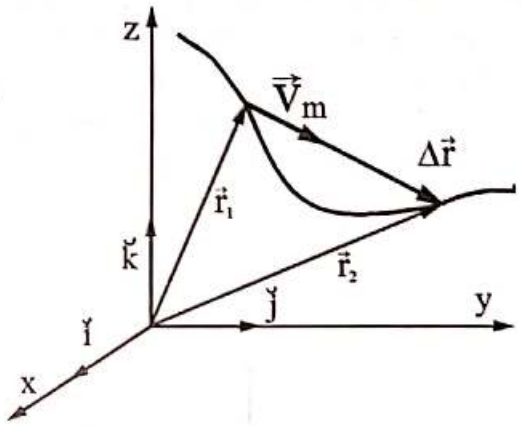


Fig. 1.5: Vector desplazamiento y vector velocidad media.

Al estudiar el movimiento de una partícula no sólo nos interesa conocer la intensidad y dirección de $\Delta\vec{r}$, es decir, cuán lejos y en qué dirección se desplazó, sino también en cuanto tiempo lo hizo, o sea el valor del intervalo Δt correspondiente. Esto nos conduce a definir el **vector velocidad media**, cociente entre $\Delta\vec{r}$ y Δt:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

La dirección y sentido de este vector son las del desplazamiento, y su intensidad será tanto mayor cuanto más distancia exista entre los puntos de partida y llegada y cuanto menos tiempo haya durado el desplazamiento.

Ejemplo 1.1:

Un móvil se desplaza hacia el norte 120 km empleando para ello 2 horas y luego hacia el este 180 km empleando 4 horas. Determinar el vector velocidad media en cada etapa y en el viaje total.

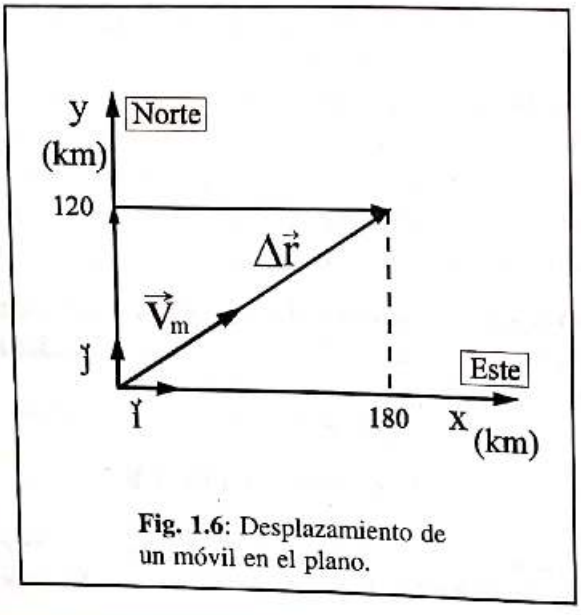


Fig. 1.6: Desplazamiento de un móvil en el plano.

1ra. Etapa

$\Delta\vec{r} = 120 \text{ km } \mathbf{j}$ $\qquad \Delta t = 2 \text{ h}$

$$\vec{v}_m = \frac{120 \text{ km}}{2 \text{ h}}\ \mathbf{j} = 60 \text{ km/h } \mathbf{j}$$

2da. Etapa

$\Delta\vec{r} = 180 \text{ km } \mathbf{i}$ $\qquad \Delta t = 4 \text{ h}$

$$\vec{v}_m = \frac{180 \text{ km}}{4 \text{ h}}\ \mathbf{i} = 45 \text{ km/h } \mathbf{i}$$

Viaje Total

$\Delta\vec{r} = 180 \text{ km } \mathbf{i} + 120 \text{ km } \mathbf{j}$ $\qquad \Delta t = 6 \text{ h}$

$\vec{v}_m = 30 \text{ km/h } \mathbf{i} + 20 \text{ km/h } \mathbf{j}$

Escaneado con CamScanner

1.5 VELOCIDAD Y ACELERACION INSTANTANEAS

La descripción de un movimiento será tanto más detallada cuanto más próximos sean los instantes en que conocemos su posición. En ese caso tendremos más valores del vector velocidad media, cada uno correspondiente a un intervalo temporal más corto. Surge naturalmente el deseo de contar con el dato de la velocidad para cada instante. Sin embargo, es claramente imposible calcular directamente $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$ si el denominador es nulo. Lo que sí podemos plantearnos es calcular a qué valor parece aproximarse dicho cociente cuando el intervalo es tan corto como se quiera. En ese caso hablamos de velocidad instantánea $\vec{v}$.*

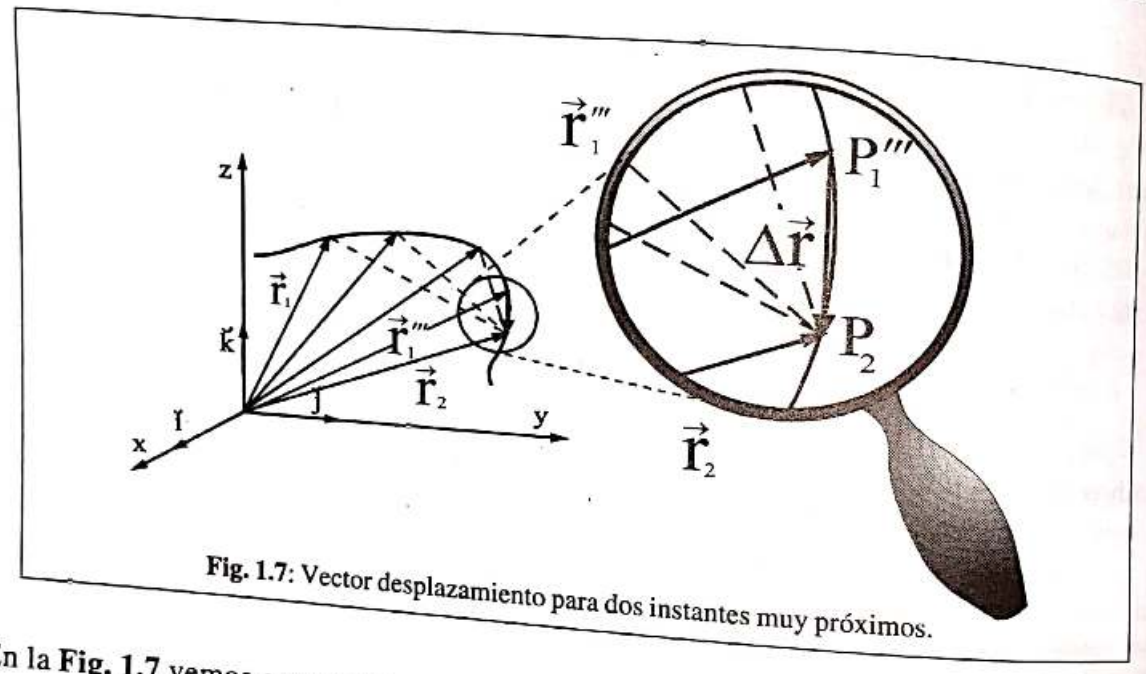


Fig. 1.7: Vector desplazamiento para dos instantes muy próximos.

En la **Fig. 1.7** vemos que cuanto menor sea la distancia entre los puntos P_1 y P_2 la dirección del vector $\Delta\vec{r}$ se confunde con la de la recta tangente a la trayectoria; cuando los dos puntos casi coinciden, $\Delta\vec{r}$ tendrá la dirección muy cercana a la de la tangente en cualquiera de esos puntos y por lo tanto $\Delta\vec{r}/\Delta t$ tendrá esa misma dirección. Habiendo definido en forma aproximada el vector velocidad instantánea $\vec{v}$ como el cociente $\Delta\vec{r}/\Delta t$, cuando los instantes t_1 y t_2 tienden a confundirse, podemos concluir: el **vector velocidad instantánea** tiene siempre la dirección de la recta tangente a la trayectoria. El sentido del vector velocidad instantánea es el mismo que el del movimiento. Al poder definir un vector velocidad para cada instante, vemos que en general no será igual en todos los instantes; es conveniente pensarlo entonces como función de t: $\vec{v} = \vec{v}(t)$.

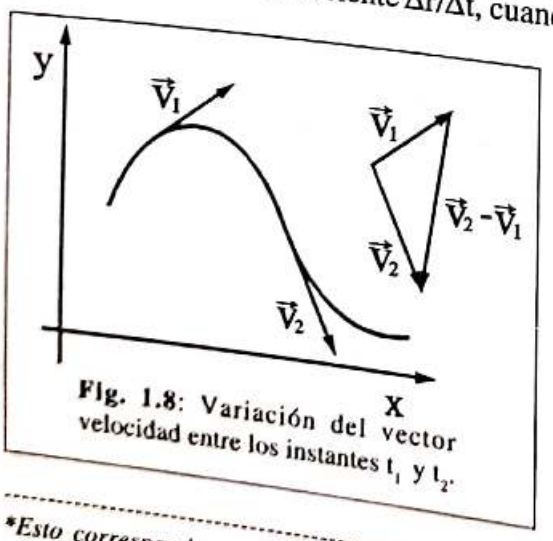


Fig. 1.8: Variación del vector velocidad entre los instantes t_1 y t_2.

Esto nos lleva a pensar en las variaciones que sufrirá $\vec{v}$ en un intervalo dado y en consecuencia a calcular las diferencias:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

siendo $\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2)$, $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$; ver **Fig. 1.8.**

**Esto corresponde matemáticamente al concepto de límite cuando el intervalo Δt tiende a cero. Utilizando ese concepto diríamos: la velocidad instantánea es el límite de la velocidad media para un lapso Δt, cuando Δt tiende a cero. Simbólicamente $v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m$*

Escaneado con CamScanner

Con un razonamiento equivalente al desarrollado cuando analizamos la variaciones de posiciones en el tiempo, podemos definir el ***vector aceleración media*** como el cociente entre $\Delta\vec{v}$ y Δt:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Asimismo, nos interesará estudiar esta aceleración media cuando el intervalo es muy corto, y por lo tanto definir la aceleración instantánea, que será una función de t: $\vec{a} = \vec{a}(t)$.

Vimos que el vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria. Consideremos ahora el caso de $\vec{a}$; para ello imaginemos un Δt muy pequeño y miremos con una **"lupa"** lo que le sucede a los vectores velocidad, como hicimos anteriormente para el caso de la velocidad instantánea, trasladando los vectores velocidad y haciendo coincidir los orígenes de ambos vectores velocidad en un mismo punto para apreciar $\Delta\vec{v}$.

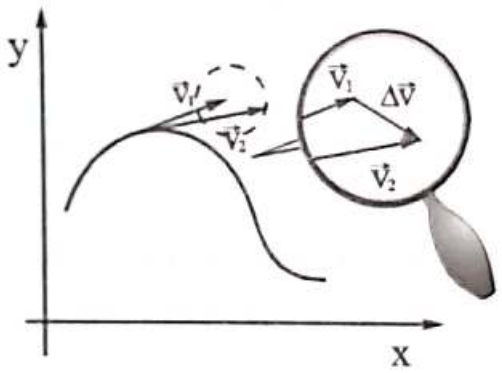


Fig. 1.9: Variación del vector velocidad para dos instantes muy próximos.

Vemos que $\Delta\vec{v}$ ***no*** tiene forzosamente la misma dirección que $\vec{v}$; $\Delta\vec{v}$ tiene, en general, componentes perpendicular y paralela a la tangente*, y por lo tanto esto también ocurre con la aceleración $\vec{a}$.

Cada componente dará información respecto de los cambios del vector velocidad; la componente tangencial respecto al módulo de la velocidad en cuanto a si aumenta o disminuye y la componente perpendicular da cuenta de la variación o cambios de la dirección del vector velocidad. En síntesis conocer $\vec{a} = \vec{a}(t)$ nos permite predecir cuál será la velocidad en algún instante que nos interese bajo determinadas condiciones.

Resumiendo, el vector aceleración puede ser nulo, tangente a la trayectoria o definido hacia la concavidad (hacia adentro). Jamás hacia afuera.

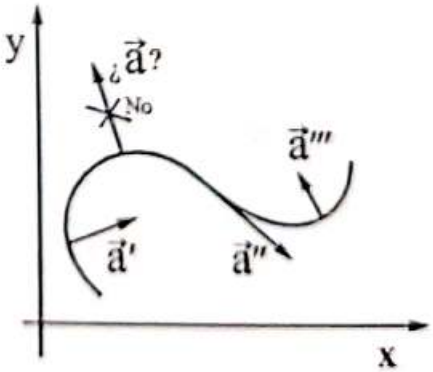


Fig. 1.10: Posibles aceleraciones para un movimiento en una dada trayectoria.

*Las componentes del vector aceleración instantánea, en la dirección tangente y en la perpendicular a la trayectoria, reciben el nombre de componentes intrínsecas (ver Capítulo 7)

Escaneado con CamScanner

1.6 RELACIONES ENTRE COMPONENTES DE $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ - GRAFICOS

Las relaciones vectoriales básicas que hemos introducido:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \qquad (1)$$

$$\vec{v}_m = \Delta r/\Delta t \qquad (2)$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m \qquad (3)$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) \qquad (4)$$

$$\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t \qquad (5)$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m \qquad (6)$$

conducen a relaciones entre las ***componentes*** de los vectores que son idénticas en forma. P ejemplo, siendo:

$$\vec{r}\,(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t_2) - \vec{r}\,(t_1)$$

$$\Delta\vec{r} = [x(t_2)\mathbf{i} + y(t_2)\mathbf{j} + z(t_2)\mathbf{k}] - [x(t_1)\mathbf{i} + y(t_1)\mathbf{j} + z(t_1)\mathbf{k}] =$$

$$\Delta\vec{r} = [x(t_2) - x(t_1)]\mathbf{i} + [y(t_2) - y(t_1)]\mathbf{j} + [z(t_2) - z(t_1)]\mathbf{k} =$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} + \Delta z\,\mathbf{k}$$

y como

$$\vec{v}_m = v_{mx}\,\mathbf{i} + v_{my}\,\mathbf{j} + v_{mz}\,\mathbf{k}$$

la expresión $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$ queda:

$$v_{mx}\,\mathbf{i} + v_{my}\,\mathbf{j} + v_{mz}\,\mathbf{k} = \frac{\Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} + \Delta z\,\mathbf{k}}{\Delta t}$$

que sólo es posible si:

$$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad v_{mz} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Escaneado con CamScanner

es decir, obtuvimos para las componentes x, y, z por separado, relaciones idénticas a la relación vectorial (2). Lo mismo pasa con las restantes.

Nótese que las últimas expresiones no son vectoriales; no hay representado en ellas ningún vector ni versor, o sea que no hay flechitas ($\rightarrow$) ni letras negritas.

En síntesis, una igualdad vectorial del tipo, por ejemplo, $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$, puede interpretarse como una forma simbólica de expresar las siguientes igualdades escalares:

$$a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad a_{my} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \qquad a_{mz} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

Analizaremos ahora los gráficos de x, v_x, a_x en función del tiempo, (las conclusiones que obtengamos valdrán también para las componentes y, z).

Consideremos el siguiente gráfico de x = x(t) de la **Fig.1.11** donde hemos señalado las componentes x_1, x_2 del vector posición correspondientes a dos instantes t_1 y t_2. Si queremos calcular la v_m correspondiente a ese intervalo utilizaremos

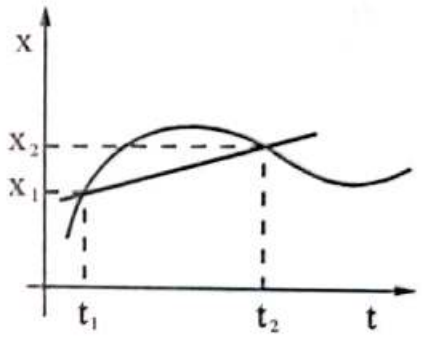


Fig. 1.11: Gráfico de la componente x del vector posición $\vec{r}$ como función del tiempo. Se muestra la recta secante que pasa por los puntos (t_1,x_1) y (t_2,x_2). (Secante: que corta)

$$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

pero este cociente es precisamente la pendiente de la ***recta secante*** que corta la curva que representa al movimiento en los puntos correspondientes a los instantes t_1 y t_2 (si no comprende inmediatamente esta parte, consulte el Apéndice matemático donde está tratado en detalle). ¿Qué pasa si ahora hacemos que t_1 y t_2 sean instantes tan próximos como se quiera?. La secante por dos puntos se aproxima todo lo que se quiera a la tangente en el punto de interés (ver **Fig. 1.12**); resumiendo:

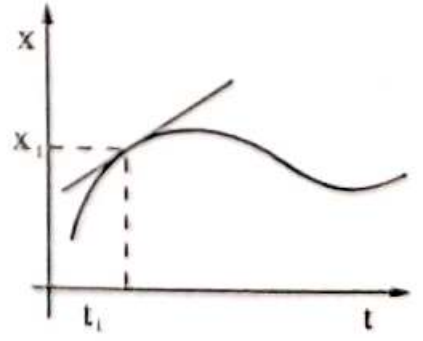


Fig. 1.12: Idem Fig 1.11, donde ahora se muestra la recta tangente a la curva en el punto (t_1,x_1). (Tangente: que toca)

- El valor de la velocidad media v_{mx} es igual a la pendiente de la recta secante (correspondiente a los instantes inicial y final del intervalo estudiado) en la gráfica de x(t).

- El valor de la velocidad instantánea v_x es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de x(t), en el punto correspondiente al instante considerado.

Escaneado con CamScanner

Por supuesto, lo mismo sucede con v_{my}, v_y en la gráfica de y(t) y con v_{mz}, v_z en la gráfica de z(t).

Un razonamiento análogo nos permite llegar a idénticas conclusiones al estudiar los gráficos de velocidad en función del tiempo y considerar los conceptos de aceleración media e instantánea. Anotamos las conclusiones sin repetir el razonamiento:

- El valor de la aceleración media a_{mx} es igual a la pendiente de la recta secante (correspondiente a los instantes inicial y final del intervalo estudiado) en la gráfica de $v_x(t)$.
- El valor de la aceleración instantánea a_x es igual a la pendiente de la recta tangente (en el punto correspondiente al instante considerado) en la gráfica de $v_x(t)$.

Nuevamente, es obvio que lo mismo sucederá con a_{my}, a_y en la gráfica de $v_y(t)$; y con a_{mz}, a_z en la gráfica de $v_z(t)$.

Ilustramos estos conceptos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2:

La **Fig. 1.13** muestra las posiciones sucesivas de una partícula que se mueve bajo la acción de un resorte, para distintos instantes de tiempo. Además se indican las direcciones y sentidos de la velocidad y de la aceleración para los instantes t = 0; 2; 3; 5 y 7 segundos. Elijamos arbitrariamente un sistema de referencia como se indica en la figura.

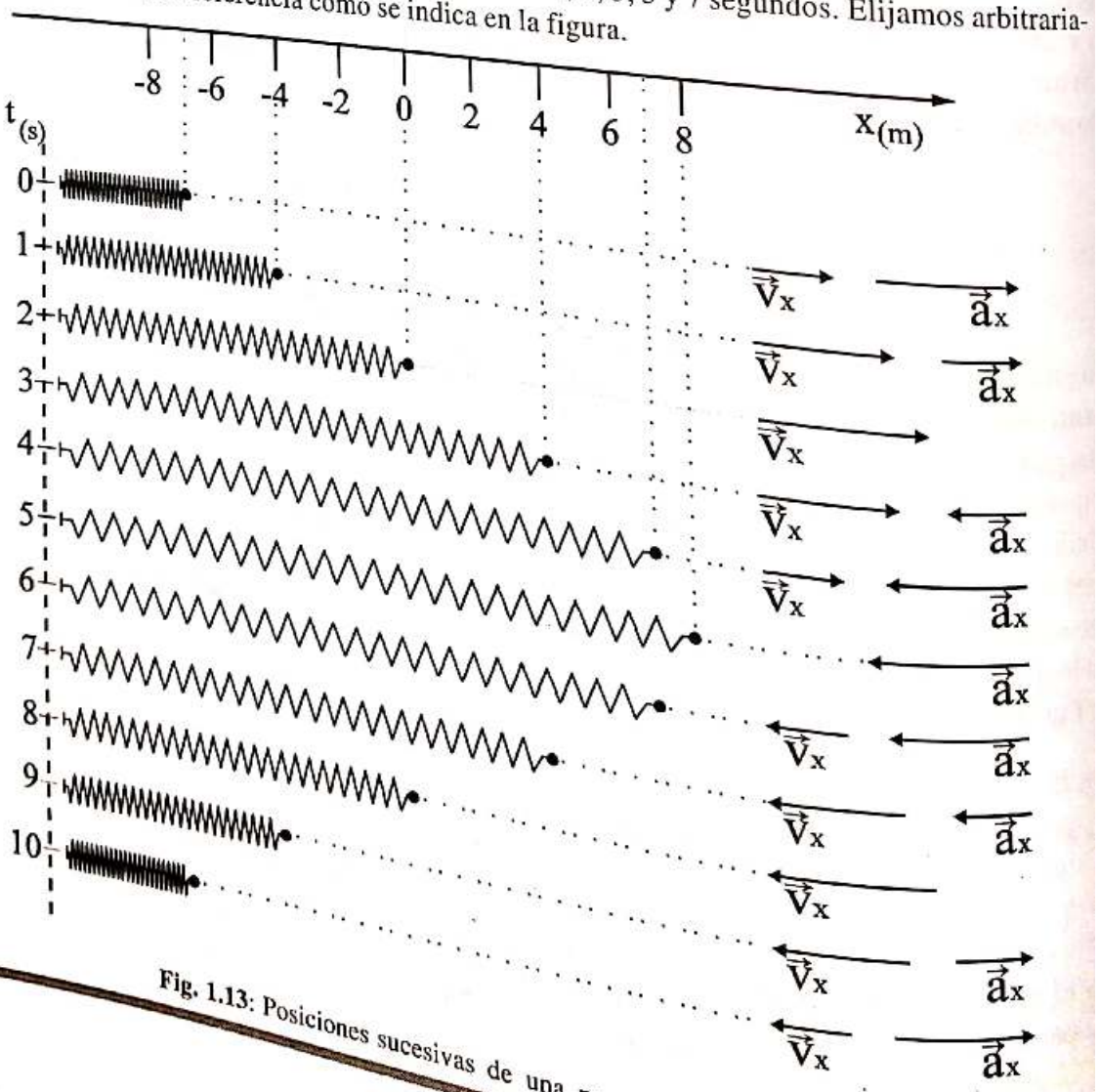


Fig. 1.13: Posiciones sucesivas de una partícula ...

Escaneado con CamScanner

Describamos brevemente el movimiento de la partícula. Por ejemplo, en t = 0 s la partícula se encuentra en la posición x =- 6,9 m, tiene una velocidad v_x= +2,1 m/s y una aceleración a_x= + 1,9 m/s². A los 2 segundos la partícula está en x = 0 m, su velocidad es de v_x= + 4,2 m/s y su aceleración es cero. De esta manera podemos describir sucesivamente el movimiento para los otros instantes que se indican. La **Tabla B** muestra los valores de la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula para distintos instantes de tiempo.

t(s)	x(m)	v(m/s)	a(m/s²)
0	-6,9	2,1	1,9
1	-4	3,6	1,1
2	0	4,2	0
3	4	3,6	-1,1
4	6,9	2,1	-1,9
5	8	0	-2,2
6	6,9	-2,1	-1,9
7	4	-3,6	-1,1
8	0	-4,2	0
9	-4	-3,6	1,1
10	-6,9	-2,1	1,9

TABLA B: Posiciones, velocidades y aceleraciones de la partícula para distintos instantes.

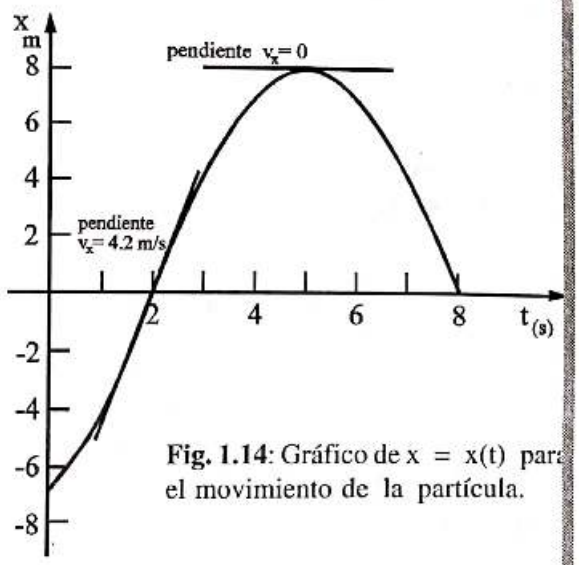


Fig. 1.14: Gráfico de x = x(t) para el movimiento de la partícula.

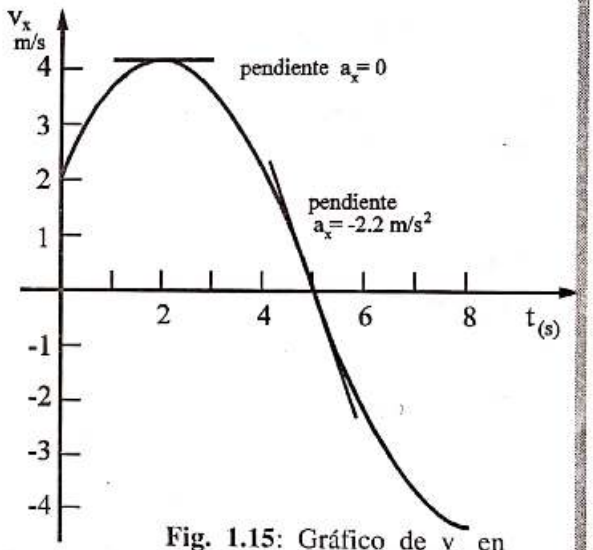


Fig. 1.15: Gráfico de v_x en función del tiempo t.

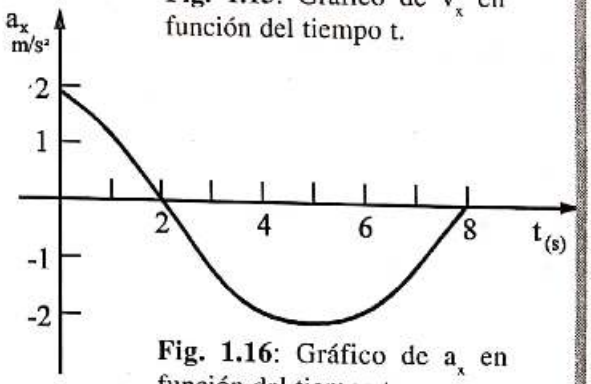


Fig. 1.16: Gráfico de a_x en función del tiempo t.

Dada la función x(t) que describe la posición en función del tiempo del movimiento de la partícula, representada gráficamente en la **Fig. 1.14**, se puede obtener a partir de ella la velocidad v_x para cada instante, calculando la pendiente de esa curva en dicho instante. De esta manera se construye el gráfico de v_x en función del tiempo como se observa en la **Fig. 1.15**. Por ejemplo, para los instantes 2, 5 y 7 segundos, los valores de las pendientes a la curva x(t) (**Fig. 1.14**) son los valores que adquiere la función v_x(t) (**Fig. 1.15**). En forma análoga podemos proceder para conseguir la aceleración para cada instante, calculando la pendiente de la curva v_x(t) en cada instante. La **Fig. 1.16** muestra la aceleración a_x en función de t obtenida a partir del cálculo de las pendientes a la curva v_x(t) de la **Fig. 1.15**. Sobre esta figura están señalados explícitamente los valores de las pendientes para los instantes t = 2; 5 y 7 segundos.

Escaneado con CamScanner

1.7 RESUMEN

Hasta aquí, y con el propósito de estudiar el movimiento de la partícula hemos definido tres magnitudes físicas:

- **Posición.**
- **Velocidad.**
- **Aceleración.**

todas ellas en relación a un **sistema de referencia** espacio-temporal.

Cada movimiento quedará caracterizado por la particular manera en que el vector posición, que señala el punto del espacio en el cual se encuentra la partícula, se vincula con la variable tiempo; esto es, el movimiento de la partícula quedará completamente determinado si se sabe qué vector posición $\vec{r}$ corresponde a cada instante de tiempo t. Además, para cada intervalo de tiempo se puede asignar un vector velocidad media $\vec{v}_m(t)$ y aceleración media $\vec{a}_m(t)$ y para cada instante se puede definir la velocidad $\vec{v}(t)$ y la aceleración $\vec{a}(t)$ instantánea.

Esta información puede ser sistematizada en:

- **Tablas de valores.**
- **Gráficos.**

Estas son maneras diferentes y a veces complementarias de describir el movimiento. Todas ellas equivalen a una función matemática que llamamos ***ecuación horaria***:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Conociendo la ecuación horaria, se puede calcular la velocidad media, para cualquier intervalo, como:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

que, para intervalos de tiempo muy pequeños, se acerca a la velocidad instantánea, asociada a cada punto de la trayectoria:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

De igual modo, a partir de $\vec{v}(t)$ se puede calcular la aceleración media e instantánea como:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \qquad \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Recordar que el vector velocidad $\vec{v}$ es siempre tangente a la trayectoria y el vector aceleración está siempre dirigido hacia su parte cóncava.

Escaneado con CamScanner

2.1 ECUACION HORARIA

Suponga una trayectoria rectilínea cualquiera

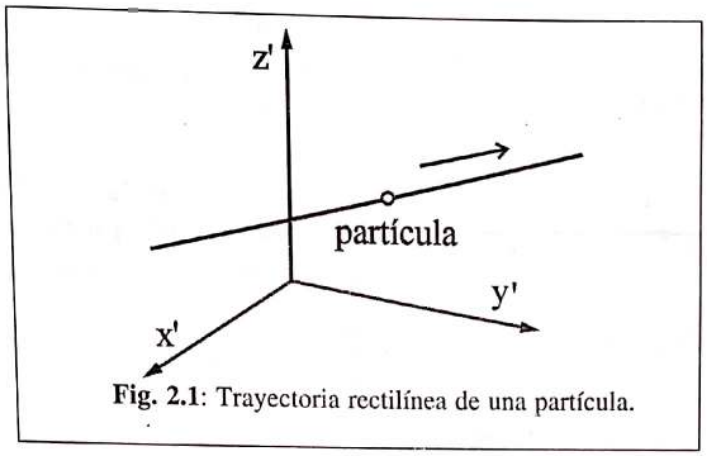


Fig. 2.1: Trayectoria rectilínea de una partícula.

Puesto que todo movimiento debe ser descripto desde un sistema de referencia, y la elección de este es arbitraria consideraremos aquel sistema en el cual la descripción sea más simple.

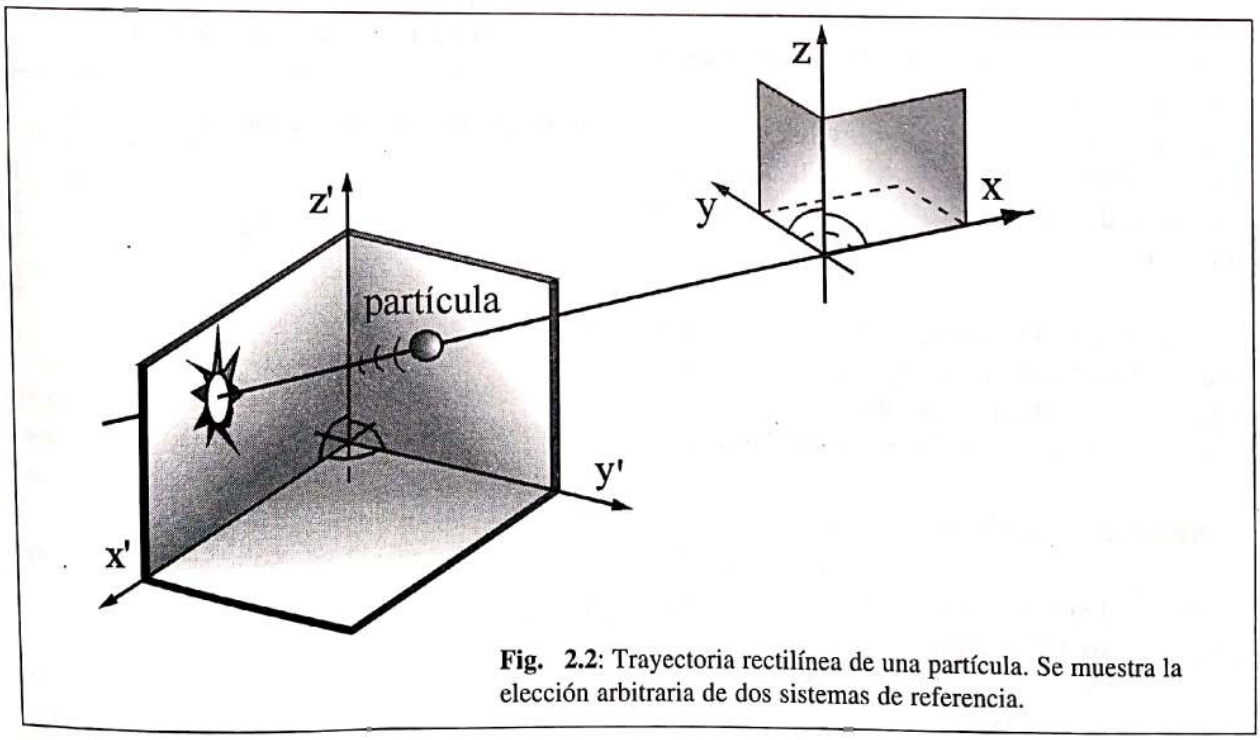


Fig. 2.2: Trayectoria rectilínea de una partícula. Se muestra la elección arbitraria de dos sistemas de referencia.

Todos los ángulos indicados son rectos; deben imaginarse a partir de esta figura, dos conjuntos de tres rectas perpendiculares en el espacio.

Por ejemplo en el caso de la figura, elegimos un sistema de referencia tal que el eje de coordenadas x contenga a la trayectoria.

Escaneado con CamScanner

De esta manera, el vector posición r quedará reducido a una única componente.

$$\vec{r} = r_x(t)\ \mathbf{i}$$

(Para revisar la descomposición de vectores, vea el Apéndice)

De esta manera la descripción se simplificará, pues podemos referirnos sólo a la componente del vector $\vec{r}$ en la dirección **i**.

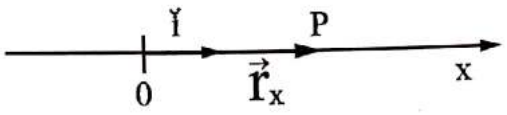


Fig. 2.3: Representación de r(t) en la dirección del eje x.

En este sistema se cumplirá además que

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\ \mathbf{i}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\ \mathbf{i}$$

Para simplificar la notación y a partir de las consideraciones hechas, de aquí en adelante trabajaremos con las componentes de las tres variables cinemáticas ($\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$) en la dirección considerada, omitiendo los subíndices y el versor **i**.

En síntesis, del caso general $\vec{r}$,$\vec{v}$, $\vec{a}$ hemos pasado al particular, x, v_x, a_x, y por simplicidad notacional omitiremos los subíndices y quedará (para el movimiento rectilíneo solamente) x, v, a.

Recordemos que el parámetro que mide los cambios del vector posición en función del tiempo es el vector velocidad. La condición de **Movimiento Uniforme** podemos expresarla como **movimiento con velocidad constante**. Y recordando que la aceleración es la variable cinemática que mide los cambios de velocidad en función de tiempo, al ser ésta constante, también podemos expresar la uniformidad como **movimiento con aceleración nula**.

En síntesis, el Movimiento Rectilíneo Uniforme queda caracterizado por las siguientes funciones:

$$\vec{a}(t) = 0 \quad (*)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 \text{ (cte)}$$

Ahora bien, ¿cuál será la función matemática que, considerando estos condicionamientos, describa el desplazamiento de la partícula en función del tiempo?

Impongamos las condiciones y tratemos de construir la ecuación horaria. Si graficamos la condición a = 0 resulta:

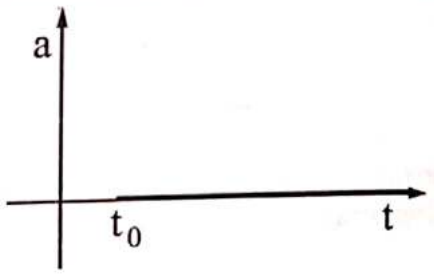


Fig. 2.4: Representación de **a** = 0.

Por definición sabemos que:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

y

$$v - v_0 = a_m (t - t_0)$$

si

$$a_m = 0 \quad \Rightarrow \quad v - v_0 = 0$$

luego

$$v = v_0$$

y traducido a un gráfico resulta

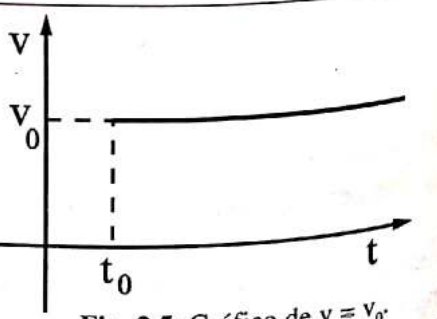


Fig. 2.5: Gráfico de $v = v_0$.

**Al vector nulo de ahora en más lo representamos simplemente 0.*

Escaneado con CamScanner

Hemos podido obtener la ley de variación de la velocidad en función del tiempo a partir del gráfico de **a**(t).

Por su definición, sabemos también que la velocidad media es:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0$$

de donde

$$\Delta x = v_0 \, \Delta t$$

expresión que permite calcular el desplazamiento Δx que la partícula realiza en cada intervalo de tiempo Δt.

Consideremos el gráfico de $v = v(t)$ y elijamos un intervalo de tiempo Δt cualquiera:

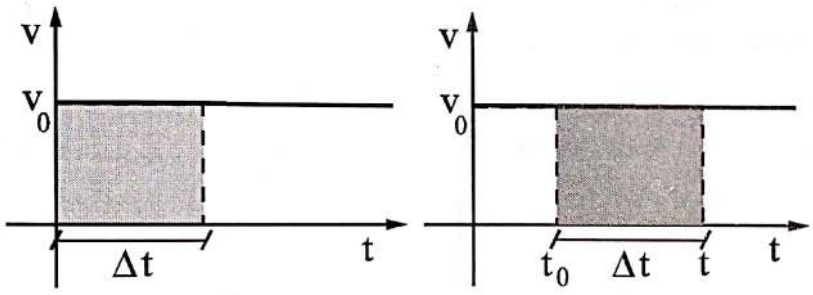


Fig. 2.6: Gráfico de $v = v_0$, $t_0 \neq 0$.

Si pensamos en términos geométricos, el producto $v_0 \Delta t$ tiene su representación en el gráfico como **área bajo la curva** correspondiente al intervalo de tiempo Δt. Si los ejes coordenados representaran longitudes, se trataría de un área en metros cuadrados, pero los ejes representan tiempo y velocidad. Es un área muy especial que no se mide en unidades de m^2, cm^2, etc, sino que al ser un producto de m/s por s, dará como resultado metros. Es decir, esta **área** tiene unidades de longitud y representa el desplazamiento realizado en el tiempo Δt.

Entonces, la ecuación $\Delta x = v_0 \Delta t$ resulta:

$$\Delta x = [\text{Area}] = x - x_0 = v_0 (t - t_0)$$

de donde

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) \qquad (1)$$

donde x y t son variables genéricas para cualquier punto de la trayectoria y x_0 es la posición de la partícula que corresponde a $t = t_0$.

La expresión (1) nos dice que en intervalos de tiempo Δt iguales, el desplazamiento de la partícula se incrementa en cantidades iguales

$$\Delta x = v_0 \Delta t$$

Esta expresión se denomina ***ecuación horaria*** del Movimiento Rectilíneo Uniforme.

Imponiendo la condición $t = 0$ para el instante t en que comenzó a registrarse el movimiento, se obtiene:

$$x = x_0 + v_0 \, t$$

La expresión encontrada es del tipo

$$y = m x + b$$

que representa la ecuación general de una recta (ver el Apéndice matemático), donde x e y son las variables, m la pendiente de la recta y b la ordenada al origen.

Si identificamos los términos generales de la ecuación de la recta con las variables cinemáticas

$$y = x$$
$$x = t$$
$$m = v$$
$$b = x_0$$

la representación gráfica de la ecuación horaria será

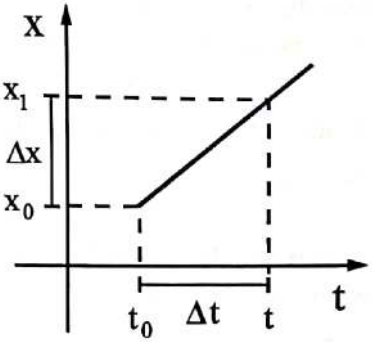


Fig. 2.7: Representación gráfica de la ecuación horaria.

Escaneado con CamScanner

De este modo hemos construído analíticamente la ecuación horaria (1) para el Movimiento Rectilíneo Uniforme, partiendo de la condición que la aceleración sea nula.*

¿Se podrá usar esta ecuación para el caso en que el movimiento se realice en dirección contraria?

Veamos: si la partícula se encuentra en $x = x_0$ para $t = t_0$ y para un cierto instante posterior se encuentra más cerca del origen de coordenadas, su velocidad media será

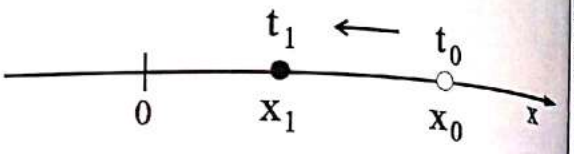


Fig. 2.8: Movimiento de una partícula con $x_0 \neq 0$.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

En este caso, Δt sigue siendo positivo, pero $\Delta x = x_1 - x_0$ es negativo. Por lo tanto v_m será también negativa.

Repitiendo el razonamiento que hicimos anteriormente, vemos que la misma ecuación describe también este caso, solamente que ahora el valor de v_0 será negativo.

Esto nos lleva a considerar dos posibles situaciones físicas descriptas por la ecuación horaria del Movimiento Rectilíneo Uniforme:

Si $v_0 > 0$, el móvil se desplaza en el mismo sentido que el elegido para el eje de coordenadas y la representación gráfica de su ecuación horaria será de la forma que se observa en la **Fig. 2.9**.

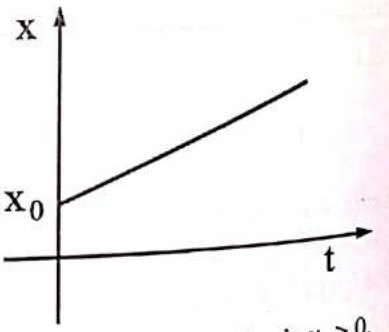


Fig. 2.9: Gráfico donde $v_0 > 0$.

Si $v_0 < 0$, el móvil se desplaza en sentido contrario. El gráfico será como el de la **Fig. 2.10**.

Piense cuál es el sentido físico de un $x_0 > 0$ o un $x_0 < 0$.

(Para esta discusión le sería muy útil repasar la representación gráfica de rectas en el Apéndice matemático).

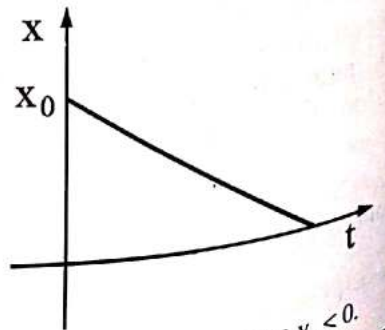


Fig. 2.10: Gráfico para $v_0 < 0$.

---

* *La ecuación horaria la hemos obtenido para una partícula que se encontraba sobre una trayectoria rectilínea moviéndose en la dirección positiva del eje de referencia y con una posición inicial* x_0

Escaneado con CamScanner

2.2 ENCUENTROS

Ejemplo 2.1:

Un automóvil sale de Buenos Aires con destino a Azul marchando a 80 km/h y simultáneamente parte desde Azul hacia Buenos Aires otro automóvil a 70 km/h. Si la distancia entre ambas ciudades es de 300 km, determine gráfica y analíticamente: a) al cabo de cuánto tiempo desde la partida se producirá el encuentro; b) a qué distancia de Buenos Aires se cruzarán; c) repita los cálculos anteriores suponiendo que el primer coche parte de Buenos Aires 45 minutos después de que lo hace el segundo.

Presentamos este sencillo problema de encuentro solamente para poner de manifiesto cómo se opera con la simbología que se ha introducido, cuya utilidad se hará notar en aplicaciones más complejas que ésta.

El problema en sí puede resolverse sin recurrir a ecuaciones ni fórmulas de ningún tipo: los automóviles están a 300 km de distancia. Uno de ellos descuenta de esa distancia 80 km en cada hora y el otro 70 km. Entre ambos descontarán 150 km de separación por cada hora que transcurre. Así, a las dos horas habrán consumido la distancia de 300 km que los separa, y habremos respondido: tiempo de encuentro: 2 horas; recorrido del primer automóvil: 160 km (2 h a 80 km/h), y por tanto se encontrarán a 160 km de Buenos Aires.

En general, dado un sistema de referencia, se determinan las ecuaciones de movimiento $x_1(t)$, $x_2(t)$. La condición de encuentro es que en algún instante las posiciones de ambos móviles coincidan, o sea, para $t = t_e$, $x_1(t_e) = x_2(t_e)$. El problema así planteado puede resolverse gráfica y analíticamente.

Elegimos un sistema de coordenadas con origen en Bs. As. y de dirección y sentido hacia Azul:

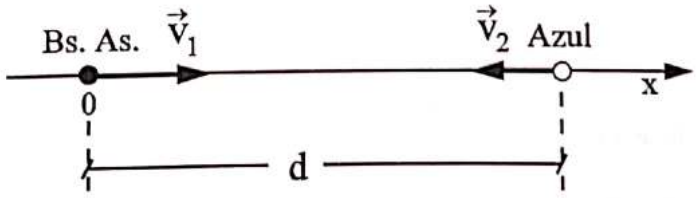


Fig. 2.11: Esquema con las condiciones iniciales.

Dado que los móviles parten simultáneamente comenzaremos a contar tiempos desde el momento de la partida. La ecuación general que describe el movimiento uniforme es:

$$x(t) = x_0 + v\,t$$

El auto que parte de Buenos Aires sale del origen de coordenadas, de modo que $x_{01} = 0$ y se mueve con velocidad coincidente con el sentido convencionalmente adoptado positivo del eje x, y entonces $v_1 = 80$ km/h. El auto que parte de Azul se halla en el instante origen de tiempos a 300 km en el sentido positivo de x desde el origen de coordenadas, de modo que $x_{02} = 300$ km y se mueve con velocidad de sentido opuesto al sentido positivo de forma que $v_2 = -70$ km/h. Midiendo el tiempo en horas y el desplazamiento en km, las ecuaciones horarias de ambos autos resultan entonces:

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 2.1:

$x_1(t) = 80\ km/h\ t$

$x_2(t) = 300\ km - 70\ km/h\ t$

(t en h; x_1, x_2 en km)

Solución analítica:

Planteamos ahora la ecuación que nos da la condición de encuentro:

$$x_1(t_e) = x_2(t_e)$$

(t_e: tiempo de encuentro)

Cuando se encuentren ambos se hallarán a la misma distancia de Buenos Aires; esto justifica la igualación de ambas coordenadas $x_1 = x_2$:

$80\ km/h\ t_e = 300\ km - 70\ km/h\ t_e$

despejando

$$t_e = \frac{300\ km}{(80 + 70)\ km/h}$$

Los automóviles se encuentran a las dos horas desde el instante de partida. El auto que partió de Bs. As. ha recorrido en ese intervalo:

$$x_1(t_1) = 80\ km/h\ t_e$$

$$x_1(t_1) = 160\ km$$

Obsérvese que, como consecuencia de la condición de encuentro, la coordenada de posición del móvil 2 será:

$$x_2(t_e) = 160\ km.$$

El auto que partió de Azul recorrió una distancia en ese intervalo que podemos calcular:

$$|x_2(t_e) - x_2(t_0)| = |160\ km - 300\ km| = 140\ km$$

Pero también podríamos haber encontrado la respuesta mediante la

Solución gráfica:

Consiste en representar gráficamente las ecuaciones horarias $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ y encontrar el instante t para el cual las gráficas se cortan.

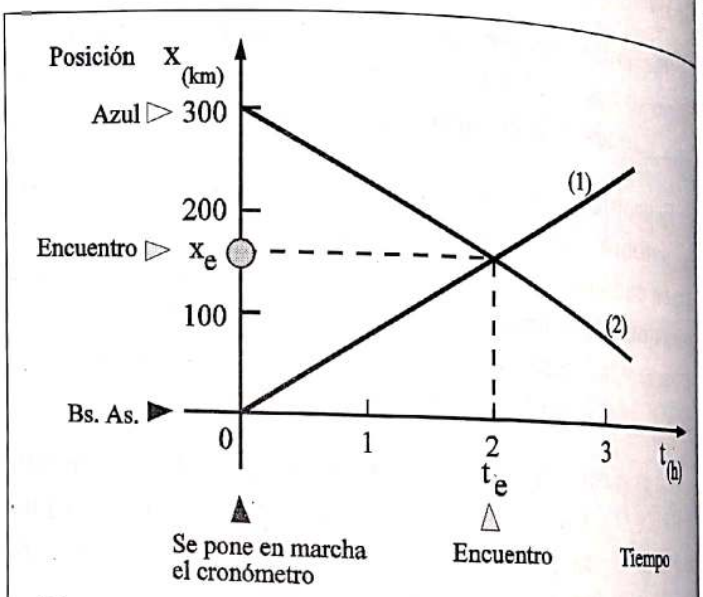


Fig. 2.12: Gráfico de las ecuaciones horarias de ambos móviles.

En coincidencia con el cálculo efectuado, leemos en el gráfico que las rectas se cortan para $t_e = 2$ h a una distancia del origen de 160 km.

Luego:

$$|\Delta x_1| = 160\ km$$

$$|\Delta x_2| = |160\ km - 300\ km| = 140\ km$$

De este modo hemos resuelto los item a) y b) del problema.

Sin embargo, podría ser interesante hacer un análisis más general de tal modo que podamos suponer distintas condiciones iniciales y obtener conclusiones rápidas.

Retomemos las ecuaciones generales del Movimiento Rectilíneo Uniforme

$$x_1(t) = x_{01} + v_1 t$$

$$x_2(t) = x_{02} + v_2 t$$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 2.1:

y apliquemos la condición de encuentro

$x_1(t_e) = x_2(t_e)$. Igualando:

$$x_{01} + v_1 t_e = x_{02} + v_2 t_e$$

$$t_e = \frac{x_{01} - x_{02}}{v_2 - v_1}$$

Supongamos, para todos los casos:

$x_{02} > x_{01}, v_1 > 0, v_2 > 0$ y veamos qué ocurre si:

a) $v_2 < v_1$

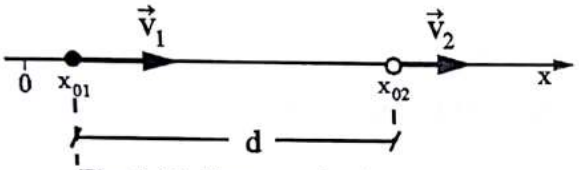


Fig. 2.13: Esquema donde $v_2 < v_1$.

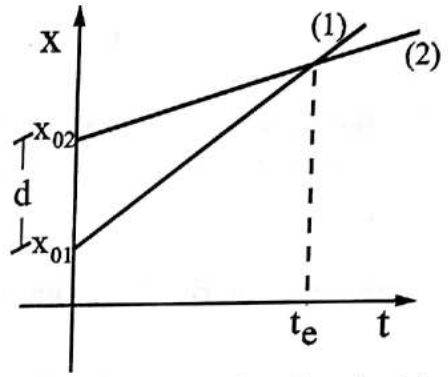


Fig. 2.14: Gráfico de las ecuaciones horarias del caso a).

$t_e > 0$, en cuyo caso se produce encuentro

b) $v_2 = v_1$

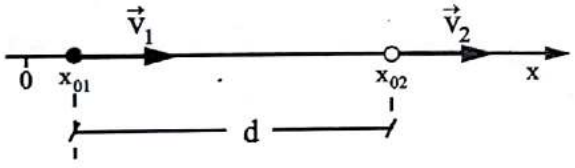


Fig. 2.15: Esquema donde $v_2 = v_1$

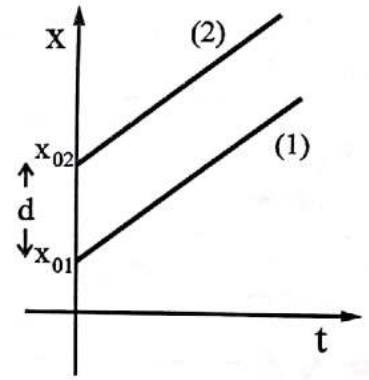


Fig. 2.16: Gráfico de las ecuaciones horarias del caso b).

t_e no está definido, no se produce encuentro

c) $v_2 > v_1$

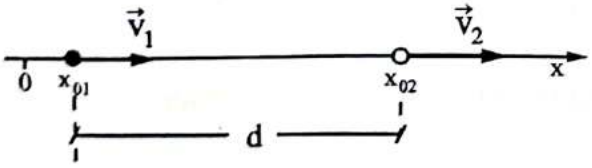


Fig. 2.17: Esquema donde $v_2 > v_1$.

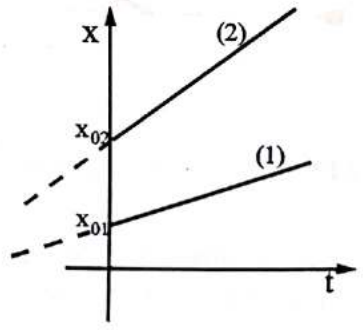


Fig. 2.18: Gráfico de las ecuaciones horarias del caso c).

$t_e < 0$, en cuyo caso no habrá encuentro. (Hay una especie de encuentro en el pasado, que se interpreta como el encuentro que habría ocurrido si los móviles en vez de iniciar sus movimientos en t = 0, hubieran estado en marcha desde antes).

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 2.1:

Observe cómo todos los casos posibles de encuentro están contemplados en la expresión genérica que hemos encontrado.(*)

Que el encuentro se produzca o no dependerá de las condiciones cinemáticas del problema.

Resolvamos ahora, para la misma situación, el caso en que la partida de los móviles ***no es simultánea***. Por ejemplo, el automóvil de Bs. As. «parte» 3/4 de hora más tarde que el que «sale» de Azul.

Debemos tener en cuenta esta condición para plantear las ecuaciones horarias del movimiento de los automóviles. Supongamos que elegimos el instante origen de tiempos cuando «parte» el auto que sale de Azul, que lo hace primero. La ecuación horaria de este movimiento es entonces la misma que antes, o sea

$$x_2(t) = 300\ km - 70\ km/h\ \ t$$

El auto que sale de Bs. As. lo hace 45 minutos (o sea 3/4 h) más tarde, de modo que

$$x_1(t) = 0\ km \quad \text{para } 0 < t < 3/4\ h$$

$$x_1(t) = 80\ km/h\ (t - 3/4h) \quad \text{para } t > 3/4\ h$$

Para determinar t_e, x_e geométricamente podemos graficar las ecuaciones horarias de cada automóvil.

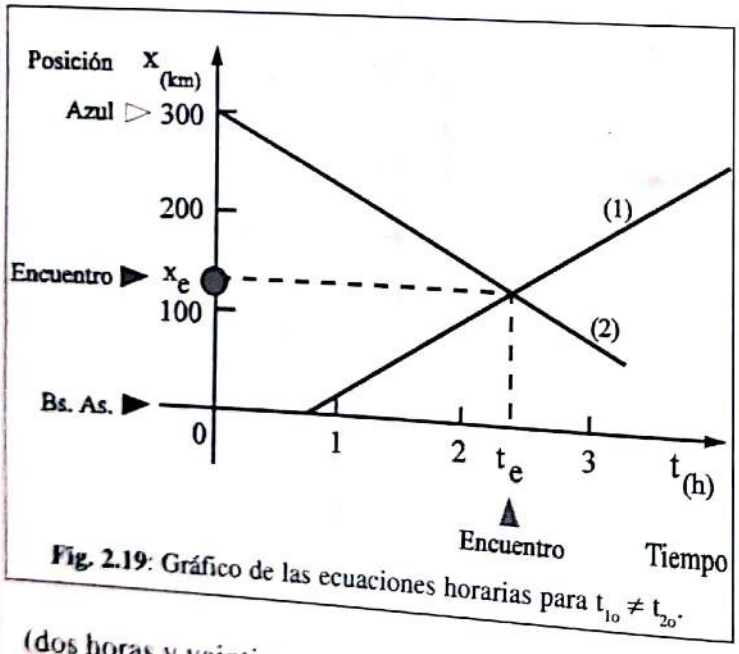


Fig. 2.19: Gráfico de las ecuaciones horarias para $t_{1o} \neq t_{2o}$.

Solución analítica:

planteamos la condición de encuentro

$$x_1(t_e) = x_2(t_e)$$

$$80\ km/h\ (t_e - 3/4\ h) = 300\ km - 70\ km/h\ t_e$$

$$\frac{300\ km + 80\ km/h\ 3/4\ h}{(80 + 70)\ km/h} = 2{,}4\ h$$

(dos horas y veinticuatro minutos) y la distancia recorrida por el auto que sale de Bs. As. hasta el punto de encuentro es:

$$x_1(t_e) = 80\ km/h\ (t_e - 3/4\ h) = 132\ km$$

* *Compruébelo Ud. mismo, analizando los restantes casos posibles (para $x_{02} > x_{01}$) en que $v_1 \neq v_2$; esto es $v_1 > 0$, $v_2 < 0$, $v_1 < 0$, $v_2 > 0$ y $v_1 < 0$, $v_2 < 0$. Para que esté completo sólo resta estudiar aquellos casos en que: $x_{02} < x_{01}$, $v_1 \neq v_2$*

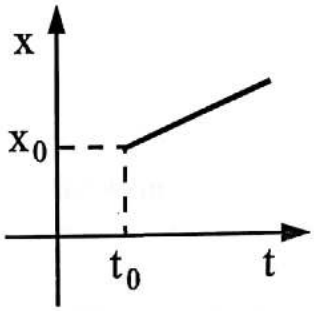
Escaneado con CamScanner

2.3 RESUMEN

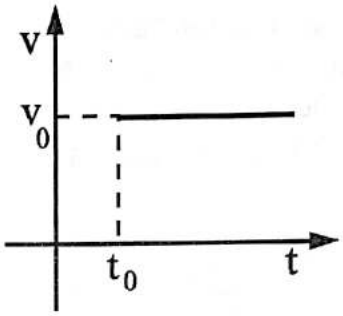
MovimientoRectilíneoUniforme

1) $x = x_0 + v_0(t - t_0)$

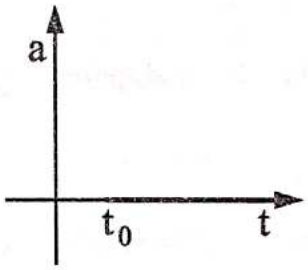
Ecuación horaria



2) $v = v_0$



3) $a = 0$

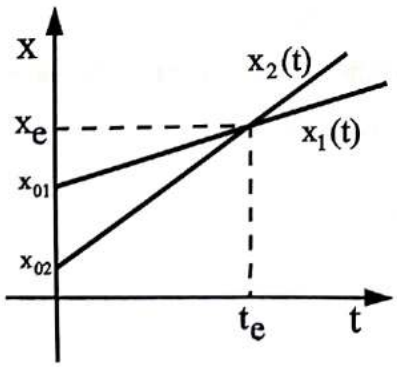


Condición de encuentro para dos móviles

$x_1(t) = x_2(t) = x_e$

Analíticamente

$t_1 = t_2 = t_e$



Gráficamente

Escaneado con CamScanner

CAPITULO 3 MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO

3.1 ECUACION HORARIA

Consideremos nuevamente el caso de un movimiento que ocurre en una recta, por ejemplo el eje x. podemos definir entonces al Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado como aquél en el cual la aceleración media es constante, es decir, no depende del intervalo de tiempo Δt considerado y en consecuencia es igual a la aceleración instantánea en todo instante. Entonces tendremos:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0}$$

de donde puede despejarse la velocidad en función del tiempo:

$$v(t) = v_0 + a\,(t - t_0) \qquad (1)$$

Esta es la expresión más general de la velocidad en un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado, donde la aceleración a es constante. Si representamos gráficamente la aceleración como función del tiempo, a = a(t) es una recta con pendiente nula.

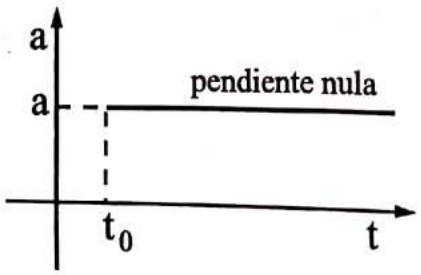


Fig. 3.1: Gráfico de á = a(t).

También podemos graficar la velocidad como función del tiempo, v(t), en el Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado, representada por la expresión (1). El Gráfico de v = v(t) es una recta con pendiente igual al valor de la aceleración constante a.

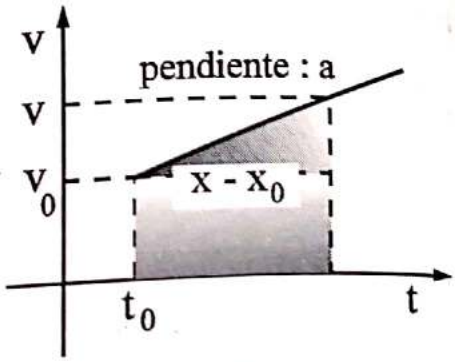


Fig. 3.2: Gráfico de v = v(t).

El desplazamiento en el Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado, definido por $x - x_0$, podemos hallarlo a partir del cálculo del área encerrada por la recta $v = v_0 + a\,(t - t_0)$ y el eje del tiempo.

El área sombreada en la figura la calculamos como la suma de un rectángulo de base $\Delta t = t - t_0$ y altura v_0, y un triángulo de la misma base y altura $v - v_0$. Entonces, como hicimos en el caso del Movimiento Rectilíneo Uniforme podemos escribir:

$$\Delta x = [\text{Area}] = v_0 \Delta t + \tfrac{1}{2}(v - v_0)\,\Delta t$$

usando la expresión (1)

$$v - v_0 = a\,\Delta t$$

y reemplazando en la anterior obtenemos:

$$\Delta x = v_0\,\Delta t + \tfrac{1}{2} a\,(\Delta t)^2$$

Donde $\Delta x = x - x_0$, $\Delta t = t - t_0$; resultando finalmente:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2} a\,(t - t_0)^2 \qquad (2)$$

Escaneado con CamScanner

La expresión (2) es la ***ecuación horaria*** del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado, y representa la ecuación de una parábola, la **Fig. 3.3** muestra dos cualesquiera, para diferentes combinaciones entre x_0, v_0, a.

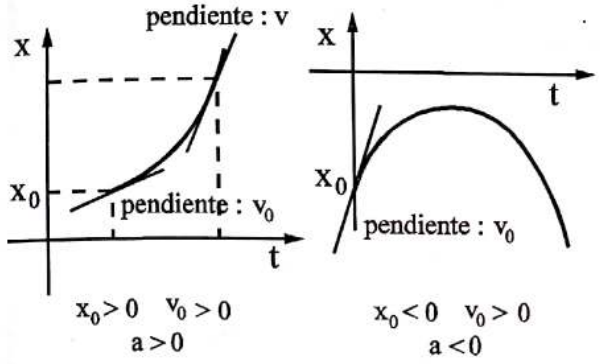


Fig. 3.3: Gráficos de x = x(t).

Debemos hacer algunas consideraciones sobre los signos positivo o negativo de las pendientes de las rectas v(t) que representan las velocidades en función del tiempo en el Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado y además sobre las partes de esas rectas que están por encima y por debajo del eje de los tiempos.

En el gráfico siguiente, el móvil describe un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado con aceleración positiva.

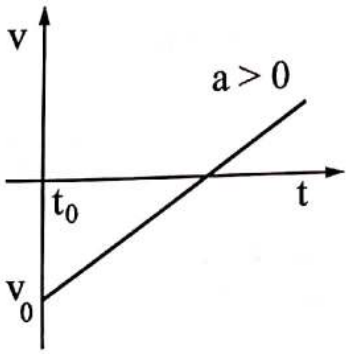


Fig. 3.4: Gráfico de v = v(t), donde a > 0.

Entre t_0 y t_1, la velocidad (en valor absoluto) ***disminuye***, mientras que para $t > t_1$ ***aumenta***. En este caso podemos decir que, entre t_0 y t_1, el movimiento es retardado, mientras que, a partir de t_1 es acelerado.

En cambio en el otro gráfico el móvil describe un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado con aceleración negativa.

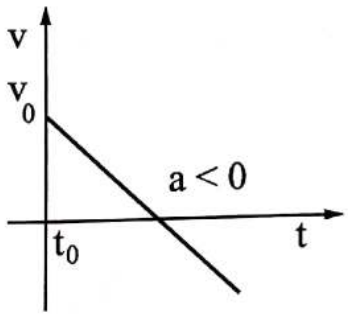


Fig 3.5: Gráfico de v = v(t), donde a < 0.

Entre t_0 y t_1 la velocidad***disminuye***, mientras que para $t > t_1$ (en valor absoluto) ***aumenta***. En este caso podemos decir que, entre t_0 y t_1 el movimiento es retardado, mientras que a partir de t_1 es acelerado.

En consecuencia para saber si un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado es acelerado o retardado***no alcanza*** con saber si la aceleración es positiva o negativa.

En lo que sigue nos dedicaremos a resolver algunos ejemplos; creemos conveniente entonces resumir las expresiones generales de la ecuación horaria, la velocidad y la aceleración en un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado:

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \tfrac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

$$v(t) = v_0 + a (t - t_0)$$

$$a(t) = a = \text{constante}$$

En estas ecuaciones los signos de x_0, v_0, a, deben ser cuidadosamente determinados en cada caso de acuerdo al origen y el sentido elegidos para el eje x. Si se elige el instante inicial en forma coincidente con el origen de tiempos se puede reemplazar $(t - t_0)$ por t, y se simplifican las ecuaciones.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 3.1:

Supongamos que queremos calcular la velocidad de una partícula que está acelerada uniformemente con a = 0,01 m/s², después de un intervalo de media hora, si tenía una velocidad de 10 km/h al comenzar dicho intervalo.

Vamos a trabajar en m y en s. Convertimos entonces los datos del intervalo y el de la velocidad inicial a estas unidades:

$$t = \tfrac{1}{2} \text{ hora} = 0{,}5 \text{ h} = 1800 \text{ s}$$

$$v_0 = 10 \text{ km/h} = 10 \text{ km/h} \frac{1000 \text{ m/km}}{3600 \text{ s/h}}$$

$$v_0 = 2{,}77 \text{ m/s}$$

Sabemos que para un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

$$v(t) = v_0 + a\,(t - t_0) = v_0 + a\,t$$

y reemplazando los valores obtenidos

$$v(t) = 2{,}77 \text{ m/s} + 0{,}01 \text{ m/s}^2\, 1800 \text{ s}$$

$$\boxed{v(t) = 20{,}77 \text{ m/s}}$$

Ejemplo 3.2:

Para poder despegar, un Jumbo 747 tiene que alcanzar una velocidad de por lo menos 360 km/h. Suponiendo que el recorrido de la pista de 1,8 km se hace con aceleración constante, ¿cuál es la aceleración mínima que necesita si parte del reposo?

Vamos a considerar un sistema de referencia como indicamos en la **Fig. 3.6**, elegimos el eje x coincidente con la pista; nuestro origen de coordenadas lo fijamos en el punto de partida, y como sentido positivo adoptamos el del movimiento del Jumbo.

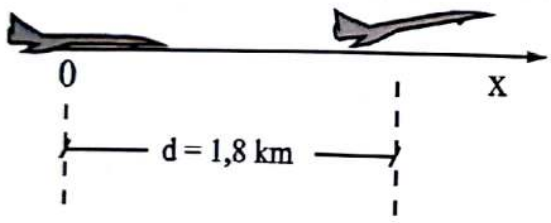


Fig 3.6: Jumbo 747, sistema de referencia elegido.

Además, medimos el tiempo a partir del instante de partida. La ecuación que describe el movimiento del avión es de la forma

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a\, t^2$$

Pero por nuestra elección del sistema de coordenadas, $x(t = 0) = x_0 = 0$; y como parte del reposo, $v(t = 0) = v_0 = 0$. En consecuencia:

$$x(t) = \tfrac{1}{2} a\, t^2$$

$$v(t) = a\, t$$

Llamemos d al recorrido del avión antes de despegar y t_d al tiempo que tarda en recorrerlo; de las ecuaciones anteriores:

$$x(t_d) = d = \tfrac{1}{2} a\, t_d^2 \qquad v(t_d) = v_d = a\, t_d$$

Si despejamos t_d de la segunda ecuación y reemplazamos en la primera, obtenemos:

$$d = \tfrac{1}{2} v_d^2 / a \;\Rightarrow\; v_d = \sqrt{2\,a\,d}$$

Ahora bien, sabemos que $v_d \geq 360$ km/h; por lo tanto

$$(2\,a\,d)^{1/2} \geq 360 \text{ km/h} \Rightarrow 2\,a\,d \geq (360 \text{ km/h})^2$$

y entonces: $a \geq \tfrac{1}{2}\, 1/d\, (360 \text{ km/h})^2$

$$a \geq \frac{(360 \text{ km/h})^2}{(2\ 1{,}8 \text{ km})}$$

$$a \geq 36000 \text{ km/h}^2 = 36000 \frac{(1000 \text{ m})}{(3600 \text{ s})^2}$$

$$a \geq 2{,}777 \text{ m/s}^2$$

y por lo tanto la aceleración mínima será de 2,777 m/s², más de la cuarta parte de la aceleración de la gravedad terrestre.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 3.3:

Analicemos el movimiento de un cuerpo cuyo gráfico de velocidad en función del tiempo podemos ver en la **Fig. 3.7**.

Podemos dividirlo en dos intervalos, desde 0 hasta 2s y desde 2s hasta 4s. En el primer intervalo el cuerpo se mueve uniformemente con una velocidad de 4 m/s.

A partir de los 2s, el móvil disminuye su velocidad acelerándose a razón de

$$[0 - 4(m/s)] / 2\ s = -2\ m/s^2$$

hasta detenerse a los 4 s.

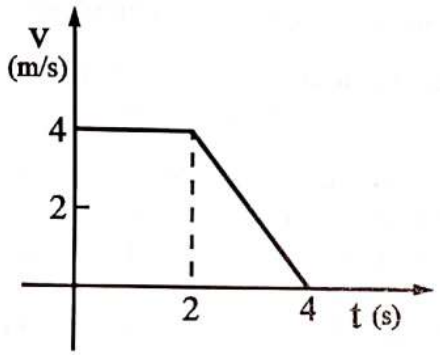


Fig 3.7: Gráfico de v = v(t).

Un gráfico de la aceleración del móvil sería:

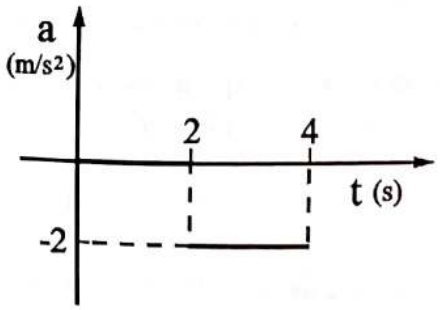


Fig 3.8: Gráfico de a = a(t).

Queremos ahora encontrar el desplazamiento del cuerpo a los 4 s. Como vimos, está representado por el área encerrada bajo la curva del gráfico v = v(t) y el eje del tiempo. Entonces:

[Area]1 = base x altura = 2 s 4 m/s = 8 m

[Area]2 = base x altura/2 = 2 s 4 m/s 1/2 = 4 m

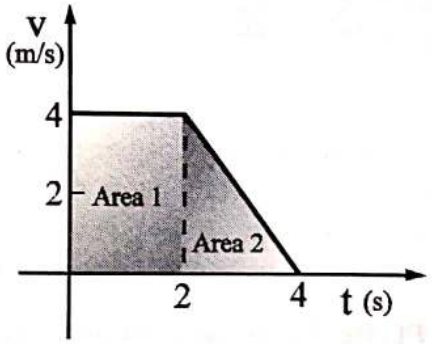


Fig. 3.9: Gráfico v = v(t).

y, por lo tanto, $\Delta x = 12$ m.

Si el móvil está en la posición $x_0 = 2$ m en $t_0 = 0$ se tendrán las ecuaciones de movimiento

$$0 \le t < 2\ s \qquad \begin{aligned} a(t) &= 0 \\ v(t) &= 4\ m/s \\ x(t) &= 2\ m + 4\ m/s\ t \end{aligned}$$

que corresponden a un Movimiento Rectilíneo Uniforme. En el segundo intervalo:

$$2 \le t \le 4\ s \qquad \begin{aligned} a(t) &= -2\ m/s^2 \\ v(t) &= 4\ m/s - 2\ m/s^2 (t - 2\ s) \\ x(t) &= 10\ m + 4\ m/s\ (t-2\ s) - \tfrac{1}{2}\ 2\ m/s^2\ (t-2\ s)^2 \end{aligned}$$

que corresponden a un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado.

La gráfica de x = x(t) será:

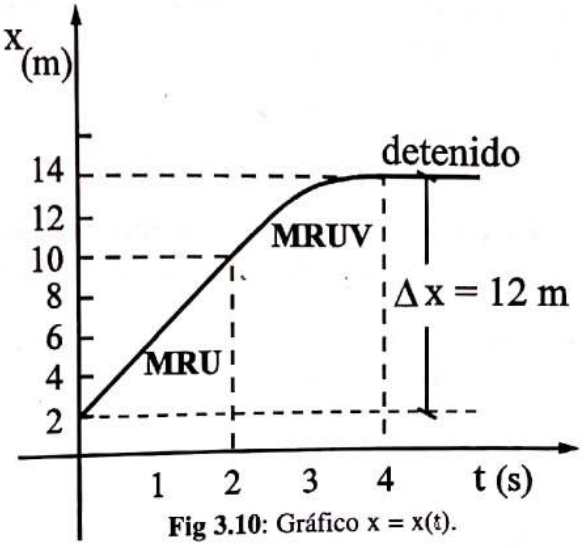


Fig 3.10: Gráfico x = x(t).

Escaneado con CamScanner

3.2 ENCUENTROS

Analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.4:

En el momento en que se enciende la luz verde de un semáforo, arranca un automóvil con una aceleración constante de 3 m/s². Justo en ese instante, un camión que lleva una velocidad constante de 15 m/s alcanza y rebasa al automóvil. En dicho momento ambos vehículos se encuentran en el mismo lugar.

a) Plantee las ecuaciones horarias de cada móvil.

b) ¿Cuánto tiempo tardará el automóvil en alcanzar al camión?

c) ¿A qué distancia del semáforo alcanzará el automóvil al camión?

d) ¿A qué velocidad irá el automóvil en el momento de alcanzar al camión?

e) ¿Deben ser iguales las velocidades de ambos vehículos cuando se encuentran?

f) Determine gráficamente en forma cualitativa las soluciones de las preguntas b) y c), mediante la representación de la posición en función del tiempo de cada vehículo.

Para resolver el problema planteado debemos elegir primero un sistema de referencia adecuado. Tomemos por conveniencia como origen del sistema de referencia al semáforo. Por otra parte, los movimientos de ambos móviles son rectilíneos y horizontales con lo cual nos resulta apropiado elegir el eje x horizontal para describirlos.

a) Planteamos entonces las ecuaciones horarias para cada móvil. Si adoptamos el instante inicial $t_0 = 0$, entonces:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a\, t^2$$

El automóvil tiene un movimiento uniformemente variado, arranca desde el semáforo (origen de nuestro sistema de referencia) con $x_{0a} = 0$, en reposo, es decir, $v_{0a} = 0$, y con una aceleración constante $a_a = 3\ m/s^2$; por lo tanto:

$$x_a(t) = 0 + 0\ t + \tfrac{1}{2} 3\ m/s^2 t^2$$

$$x_a(t) = 3/2\ m/s^2\ t^2$$

En cambio, el camión se mueve con un movimiento uniforme con velocidad constante igual a su velocidad inicial $v_{0c} = 15\ m/s$, su aceleración (por ser constante su velocidad) es cero y en el instante inicial $t_0 = 0$ también pasa por el semáforo, es decir $x_{0c} = 0$; entonces

$$x_c(t) = 0 + 15\ m/s\ t + \tfrac{1}{2} 0\ t^2$$

$$x_c(t) = 15\ m/s\ t$$

b) Ahora, para hallar cuánto tiempo tardará el automóvil en alcanzar al camión, debemos imponer la condición de encuentro de ambos móviles, es decir:

$$x_a(t_e) = x_c(t_e)$$

$$3/2\ m/s^2\ t_e^2 = 15\ m/s\ t_e$$

y ahora debemos despejar de la igualdad anterior t_e. Podemos simplificar:

$$3/2\ m/s^2\ t_e^2 - 15\ m/s\ t_e = 0\ ,$$

$$t_e(3/2\ m/s^2\ t_e - 15\ m/s) = 0$$

$$\therefore\ t_e = 0 \quad \text{ó} \quad t_e = \frac{15\ m/s}{3/2\ m/s^2}$$

tal que:

$$\boxed{t_e = 10\ s}$$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 3.4:

Es decir, que el automóvil tardó 10 segundos en encontrarse nuevamente con el camión. ¿Por qué decimos «nuevamente»? Porque la ecuación tiene dos soluciones: una es $t_e = 10$ s, y la otra $t_e = 0$ s (ya lo sabíamos a priori, puesto que para ese tiempo ambos móviles se encontraron por primera vez en el semáforo: $x_{0a} = x_{0c} = 0$ m).

Continuemos con la resolución del problema. La pregunta **c)** nos pide a qué distancia del semáforo alcanzará el automóvil al camión. Ya que conocemos t_e podemos remplazar sea en (1) o en (2), da lo mismo, ya que impusimos la condición de encuentro en (3). Entonces, por ejemplo:

$$x_a(t_e) = 3/2 \text{ m/s}^2 (10 \text{ s})^2 = 3/2 \text{ m/s}^2 \, 100 \text{ s}^2$$

$$x_a(t_e) = 150 \text{ m, o bien}$$

$$x_c(t_e) = 15 \text{ m/s} \; 10 \text{ s}$$

$$\boxed{x_c(t_e) = 150 \text{ m}}$$

d) ¿Cuál es la velocidad del automóvil en el momento de alcanzar al camión?

En $t = t_e = 10$s,

$$v_a(t) = v_{0a} + a_a t$$

y como $v_{0a} = 0$, entonces

$$v_a(t_e) = 0 + 3 \text{ m/s}^2 10 \text{ s}$$

$$v_a(t_e) = 30 \text{ m/s}$$

e) ¿Deben ser iguales las velocidades de los vehículos en un encuentro?

No, las velocidades de los vehículos en un encuentro no tienen por qué ser iguales; pueden serlo, o no, como en este caso. La condición de encuentro es que las posiciones de los móviles sean iguales en un instante dado, sin que se imponga condición alguna sobre las velocidades, ni sobre las aceleraciones.

f) Para determinar gráficamente la solución a un problema de encuentro debemos representar las ecuaciones horarias de ambos móviles y el punto de cruce de las gráficas es donde se cumple la condición de encuentro:

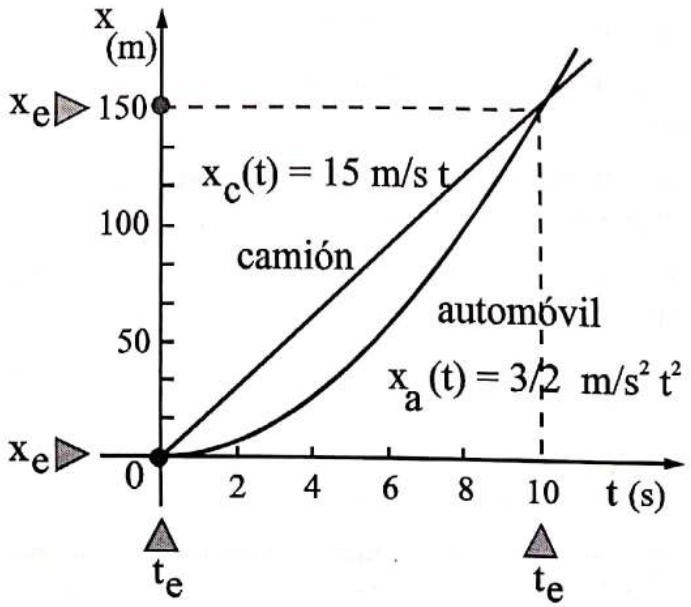


Fig. 3.11: Gráfico de las ecuaciones horarias de ambos móviles.

Escaneado con CamScanner

3.3 MOVIMIENTOS RECTILINEOS EN LAS PROXIMIDADES DE LA TIERRA

3.3.1 CAIDA DE LOS CUERPOS

Un ejemplo cotidiano de movimiento con aceleración constante es el de un cuerpo que cae hacia la Tierra. Se observa experimentalmente que si no hay resistencia del aire, todos los cuerpos, independientemente de su peso, tamaño y forma caen con la misma aceleración en la misma región de la superficie terrestre. Asimismo, si la distancia recorrida no es demasiado grande comparada con el radio de la Tierra, dicha aceleración es constante. Este movimiento en el cual despreciamos la resistencia del aire y la pequeña variación con la altura lo llamaremos caída libre. De igual manera estas condiciones las supondremos válidas al lanzar un cuerpo desde la superficie hacia arriba; en este caso hablaremos de un tiro vertical.

Tanto en la caída libre como en el tiro vertical, que en realidad son casos particulares de Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado, esta aceleración debida a la gravedad la llamaremos g . Su valor cerca de la superficie de nuestro planeta es 9,8 m/s² aproximadamente y se dirige hacia su centro *. Veremos que esto también es válido para movimientos bidimensionales que usualmente se denominan «tiro oblícuo» y que estudiaremos en el capítulo 5, pero en ese caso no se tratará de Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado; sus trayectorias no serán rectas, sino parábolas.

El movimiento de caída libre es en algunos casos muy semejante al movimiento de caída real de los cuerpos. Es común en Física plantear ciertas aproximaciones razonables que nos permitan resolver el problema más fácilmente. Nos queda claro que si estamos estudiando la caída de una hoja de papel, despreciar la resistencia del aire no será una buena aproximación. Sin embargo pensemos qué sucedería si hacemos con el papel un bollo. En algunos casos, podríamos comprobar que la aproximación es bastante buena.

Es importante tener presente cuáles son las condiciones que se deben cumplir para tal o cual aproximación. Por ejemplo, si la aproximación de caída libre se cumpliera en cualquier condición. ¡Pobres paracaidistas!

En la sección siguiente veremos con más detalle los efectos de la resistencia del aire en la caída libre.

Uno de los errores más frecuentes y casi inevitables es le error en el signo de la aceleración. Intentemos aclarar esto:

Todo el problema consiste en saber si el valor de g que aparece en las ecuaciones es positivo o puede, en cambio, ser positivo o negativo.

Si se adopta la definición de que $\vec{g}$ es el módulo de del vector $\vec{g}$, como en muchos libros, naturalmente que será positivo, como todo módulo diferente de cero.

Si en cambio se acepta que g es la componente según el eje y del vector $\vec{g}$ (más precisamente debería llamarsela g_y), entonces g podría ser positiva o negativa, según cómo esté orientado el eje.

Lo importante es que, después de adoptar una u otra convención, el signo quede de acuerdo con lo que realmente sucede en ese movimiento.

En lo que sigue hemos intentado evitar poner g «a secas» y en cambio escribiremos $|\vec{g}|$, $-|\vec{g}|$, a_y, g_y, etc., pues se prestan menos a confución.

**En nuestros cursos usaremos casi siempre $|\vec{g}| = 10$ m/s² para abreviar cuentas. Si no hacemos siempre es sólo para destacar que el módulo de $\vec{g}$ es un valor experimental.*

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 3.5:

Caída libre

¿Qué velocidad tenía la manzana al pegarle en la cabeza a Newton, si cayó libremente desde una altura de 3m?

Como siempre, elegimos un sistema de coordenadas, en este caso podemos tomar nuestro origen coincidente con la posición de partida, y orientar nuestro eje vertical hacia el suelo. Con esta elección y a partir del reposo, tendremos $y_0 = 0$, $v_0 = 0$; entonces

$$y(t) = \tfrac{1}{2} |\vec{g}| \, t^2$$

$$v(t) = |\vec{g}| \, t$$

Sea t_c el tiempo que tarda la manzana en caer libremente hasta la cabeza, recorriendo la distancia h. Tendremos entonces:

$$h = \tfrac{1}{2} |\vec{g}| \, t_c^2 \qquad (1)$$

y la correspondiente velocidad final de la manzana:

$$v(t_c) = v_f = |\vec{g}| \, t_c$$

Despejamos t_c de la primera ecuación, reemplazamos en la segunda y nos queda:

$$v_f = \sqrt{2|\vec{g}|h}$$

que en este caso resulta ser:

$$v_f = \sqrt{2 \, 10\,m/s^2 \, 3\,m} = 7{,}75\,m/s$$

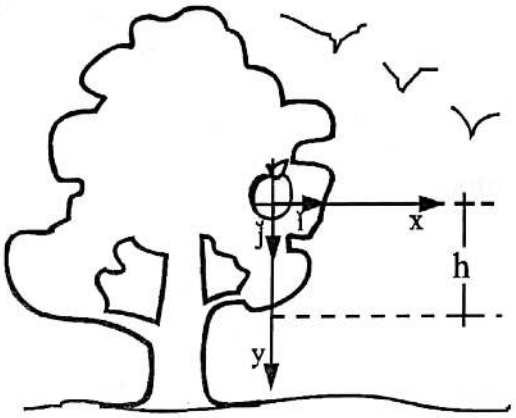


Fig. 3.12: Caída de la manzana.

Es interesante notar la analogía de este problema con el ejemplo del Jumbo 747. A pesar de las diferencias de las situaciones planeadas, las ecuaciones que se utilizan son esencialmente las mismas, debido a que ambos son casos de movimientos uniformemente acelerados, para el Jumbo, $a = 2{,}77\ m/s^2$ mientras que en este problema $a = |\vec{g}| = 10\ m/s^2$.

Ejemplo 3.6:

Tiro vertical

Consideremos el siguiente problema: un muchacho lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial, $v_0 = 30$ m/s.

a) ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en alcanzar la altura máxima?

Ante todo nos conviene elegir un sistema de referencia apropiado para describir el movimiento de la pelota, que será rectilíneo. Tomemos, arbitrariamente, un sistema que esté fijo a la Tierra y adoptemos el sentido positivo del eje vertical (paralelo a la trayectoria) hacia arriba. En consecuencia, la aceleración de la gravedad g será un vector con dirección vertical y sentido dirigido hacia abajo (centro de la Tierra). La ecuación horaria obtenida para un movimiento rectilíneo uniformemente variado, como vimos anteriormente, es:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a \, t^2$$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 3.6:

además:

$$v(t) = v_0 + a\,t$$

En el punto más alto de la trayectoria la velocidad instantánea de la pelota es $v = 0$; además, sabemos que se lanzó con una velocidad inicial $v_0 = 30$ m/s y la aceleración es $a = -|\vec{g}|$ de acuerdo al sistema de referencia que hemos elegido; entonces, como:

$$v = v_0 - |\vec{g}|\,t$$

resulta:

$$t = \frac{(v_0 - v)}{|\vec{g}|}$$

y, entonces:

$$t = \frac{(30\text{m/s} - 0\text{m/s})}{10\text{m/s}^2}$$

$$\boxed{t = 3\text{ s}}$$

b) ¿Cuál será la altura máxima que alcanzará la pelota?

Como sabemos ahora que el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima es 3 segundos y conocemos la velocidad inicial con que fue lanzada usando la ecuación:

$$y = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2}|\vec{g}|\,t^2$$

y tomando a la mano del muchacho como la posición inicial $y_0 = 0$ tenemos:

$$y_{máx} = 0\text{ m} + 30\text{ m/s}\ 3\text{ s} - \tfrac{1}{2}\ 10\text{ m/s}^2\ (3\text{ s})^2$$

$$\boxed{y_{máx} = 45\text{ m}}$$

c) ¿Qué velocidad instantánea tendrá la pelota al cabo de 1 segundo?

Para calcularla usamos nuevamente la ecuación $v = v_0 - |\vec{g}|\,t$ y reemplazando por los datos tendremos que:

$$v(t=1\text{s}) = 30\text{ m/s} - 10\text{ m/s}^2\ 1\text{ s}$$

$$\boxed{v(t=1\text{s}) = 20\text{ m/s}}$$

d) Dibuje cualitativamente los vectores velocidad instantánea y aceleración de la pelota al cabo de 1 segundo.

De acuerdo al sistema de referencia elegido, tendremos: (ver **Fig. 3.13**)

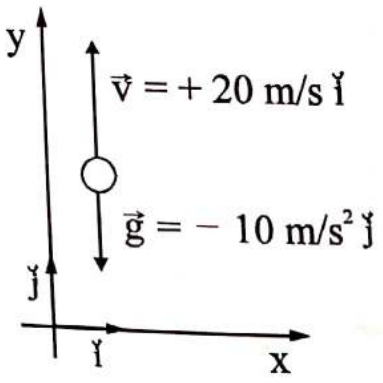


Fig. 3.13: Representación cualitativa de $\vec{v}$ y $\vec{g}$.

Nota: Frecuentemente los alumnos tienden a asociar el movimiento de caída libre o tiro vertical con el eje y. Debemos recalcar que la elección del sistema de coordenadas es totalmente arbitraria y bien podríamos haber elegido en nuestro ejemplo al eje x vertical. El hecho de utilizar usualmente **x** como eje horizontal e **y** vertical es una mera cuestión de convención.

Escaneado con CamScanner

3.4 INCLUSION DE LA RESISTENCIA DEL AIRE

Si tenemos en cuenta la resistencia del aire, la velocidad de un cuerpo que cae hacia la tierra está dada por la ecuación

$$v(t) = \sqrt{|\vec{g}|/k}\,\frac{e^{2\left(\sqrt{k|\vec{g}|}\right)t} - 1}{e^{2\left(\sqrt{k|\vec{g}|}\right)t} + 1}$$

donde k es una constante que depende de la masa y del tamaño del cuerpo.

Por ejemplo, para una piedra cuyo radio es 1 cm la constante k es aproximadamente 10^{-2} m^{-1}. En la **Fig. 3.14** hemos graficado v(t) para este caso.

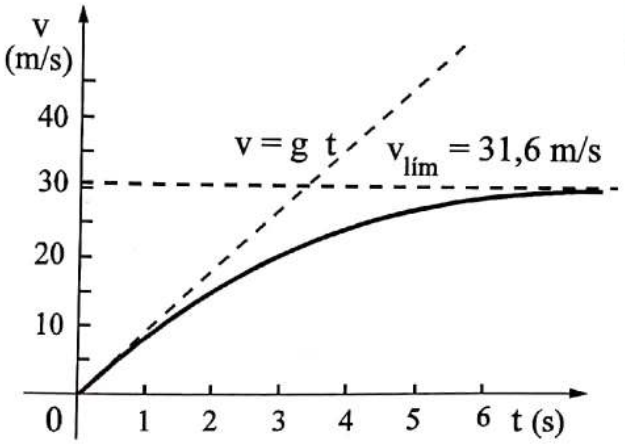


Fig. 3.14: Gráfico de v=v(t)

Podemos ver que para $t < 1/[2(k\,|\vec{g}|)^{1/2}] = 1{,}5$ s, resulta $v(t) \approx |\vec{g}|\,t$ que corresponde al caso de caída libre. Sin embargo, después de haber transcurido un lapso suficientemente largo, la acción de la gravedad es gradualmente compensada por la resistencia del aire y el cuerpo alcanza una velocidad constante $v_{lím} = (|\vec{g}|/k)^{1/2}$, llamada velocidad límite, que en nuestro caso es de 31,6 m/s.

La aproximación de caída libre que hemos estudiado, corresponde al caso en que la constante k es muy pequeña ($k \approx 0$), entonces $v(t) \approx |\vec{g}|\,t$.

Si hubiésemos dejado caer la piedra del ejemplo desde una altura de 10 m tardaría en llegar al suelo 1,5 seg, de la **Fig. 3.14** podemos concluir que la caída libre no es una mala apoximación, sobre todo teniendo en cuenta lo simple de sus expresiones matemáticas.

Dejamos ahora, para analizar (cualitativamente) por el lector, qué le sucede a un paracaidista antes y después de abrir el paracaídas.

En el libro de Elsberg y Lerner, citado en la bibliografía, se da con más detalle la dinámica y cinemática de cuerpos que caen en medio aéreo. Entre otros datos muestra que una gota de agua de 50 micrones de diámetro, o sea del grosor de un cabello, cae a 30 cm/s. Una gota de saliva que proviene de un estornudo puede permanecer varios minutos en el aire, con miles de gérmenes vivos en su interior.

3.5 RESUMEN

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \tfrac{1}{2}\,a\,(t - t_o)^2$$

$$v(t) = v_o + a\,(t - t_o)$$

$$a(t) = a = \text{constante}$$

Los signos de x_o, v_o y a deben ser cuidadosamente determinados en cada caso, de acuero al sistema de referencia elegido.

CAIDA LIBRE - TIRO VERTICAL

Las ecuaciones de Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado con $a = |\vec{g}|$ o $a = -|\vec{g}|$ de acuerdo al sistema de referencia elegido, con el eje hacia abajo o hacia arriba, respectivamente.

Escaneado con CamScanner

4.1 INTRODUCCION

Hasta el momento decíamos (de los móviles o partículas) que se movían con velocidad constante o variable, que permanecían en reposo, o que se aceleraban, y aclarábamos o dábamos por sobreentendido que lo hacían respecto de las rutas, localidades, en definitiva, respecto de la Tierra.

Sin embargo, hay casos en que nosotros, automáticamente, usamos otros sistemas de referencia que no son la Tierra; por ejemplo, le decimos a un niño que viaja en tren a nuestro lado que se quede quieto. La única forma en que la criatura puede cumplir con nuestro deseo sería arrojándose por la ventanilla o correr hacia el furgón de cola a 95 km/h (no era esa nuestra intención), y por más que se tranquilice, no podrá hacer otra cosa que seguir moviéndose a 95 km/h, junto con el tren y demás pasajeros adultos. En este caso, sin darnos cuenta, usamos el sistema de referencia fijo al tren, aunque jamás oiremos que el tren se encuentra quieto, dicho por un pasajero, a menos que efectivamente esté detenido con respecto a la Tierra.

La condición de movimiento - o falta de él - es, pues, relativa a los sistemas de referencia, seamos o no conscientes de ello al hacer nuestras afirmaciones. Moverse no es algo propio de un cuerpo, sino algo que concierne a ***dos*** cuerpos.

No es fácil convencer a nadie de que la montura de un potro indómito está en reposo, si se elige un sistema de referencia adecuado, mientras que la Tierra, con sus árboles e instalaciones, se sacude hacia uno y otro lado. Efectivamente, aunque teóricamente podría hacerse tal afirmación, no es frecuente hacerla, ni práctico.

Ya que en este tema constantemente decimos **relativa/o a...** y puede confundirse con **relatividad**, que quede claro que esto ***no*** es la teoría de la relatividad de Einstein. La relatividad einsteniana no forma parte del presente curso, y sólo podemos adelantar que se ocupa también de la relatividad de los movimientos y demás descripciones de fenómenos, y que tiene especial importancia cuando se consideran velocidades comparables con la de la luz (300.000 km/s). En este curso nos referiremos sólo a casos de velocidades comparativamente pequeñas, donde la relatividad de Einstein puede no tenerse en cuenta.

Parece que lo más práctico consiste en utilizar a la Tierra como referencia universal, si no fuera porque, entre otras cosas, también deseamos decir a veces que la Tierra se mueve. Ninguna dificultad habrá si decimos respecto de qué (del Sol, de las estrellas, etc.). Según este enfoque relativista, la discusión entre Galileo y la inquisición sobre si la Tierra se mueve o no lo hace, parecería - por ahora - carecer en absoluto de significado, al no haber referencia a sistema patrón alguno. Por entonces consideraban que la quietud o el movimiento eran atributos de cada cuerpo y no de pares de ellos. Cuando decían **se mueve o no se mueve** no mencionaban otro cuerpo. Es más, dejaban entrever que tenían la idea de un espacio absoluto que serviría como sistema de referencia universal, aunque no lo decían en forma explícita.

Como es fácil imaginar, la descripción de un movimiento depende del sistema de referencia que se utilice: el movimiento de la púa fonográfica sobre un disco, respecto del disco, sigue una trayectoria en forma de espiral plana, cuya longitud podría estimarse en 300 m, que la púa recorre totalmente a una velocidad variable. En cambio, respecto de la habitación, el movimiento de la púa consiste en un arco de círculo de no más de 25 centímetros de recorrido, y con una velocidad de módulo constante.

Escaneado con CamScanner

No sólo la descripción de la trayectoria cambia con el sistema de referencia; también lo hacen la velocidad y aceleración.

4.2 LA TRANSFORMACION DE GALILEO

Consideremos dos sistemas de referencia, y que uno de ellos se mueve con respecto al otro de modo que su origen hace un movimiento rectilíneo uniforme y sus ejes mantienen siempre la misma orientación. A ese movimiento se lo llama **Traslación Uniforme**.

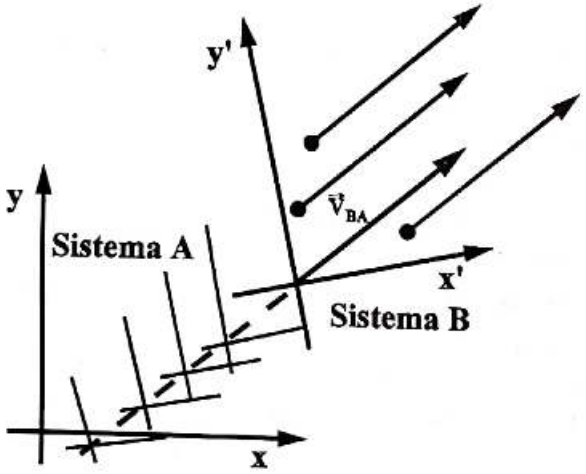


Fig. 4.1: Traslación uniforme del sistema B respecto del A. Todos los puntos de B tienen la misma velocidad constante $\vec{v}_{AB}$.

Todos los puntos de B se mueven con velocidad $\vec{v}_{BA}$ que es **la velocidad de B respecto de A**. Recíprocamente A se mueve con respecto a B con velocidad $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$ donde el signo menos indica que $\vec{v}_{AB}$ es opuesta a $\vec{v}_{BA}$.

Supongamos ahora una partícula ubicada en un punto P del espacio, de la cual conocemos su vector posición $\vec{r}_{PB}$ y su velocidad $\vec{v}_{PB}$ en un instante dado, medidos con respecto al sistema de referencia B, ver **Fig. 4.2**.

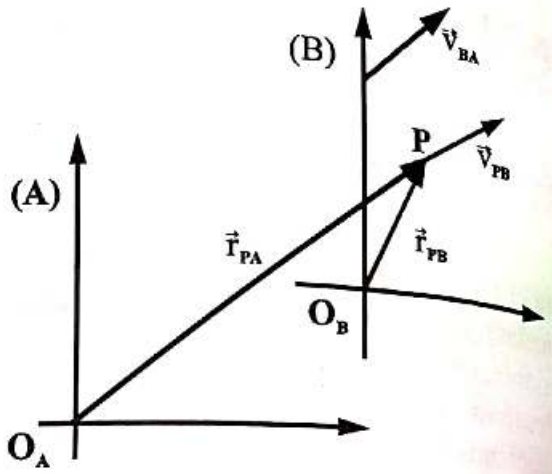


Fig. 4.2: Observación del punto P desde dos sistemas de referencia: A y B.

Medida desde A la posición es otra, aunque su ubicación física en el espacio es la misma, ya que el vector posición que ahora señala la partícula P desde O_A es $\vec{r}_{PA}$.

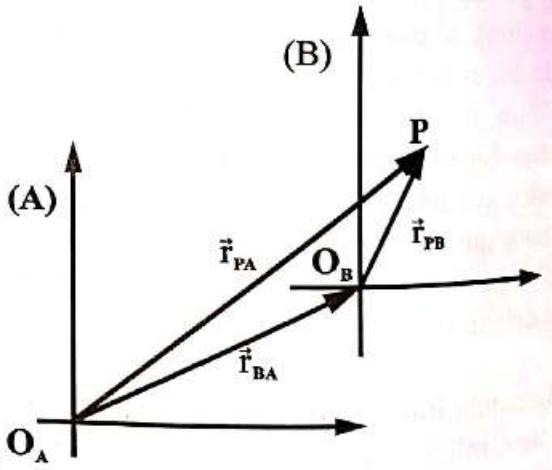


Fig. 4.3: Transformación de coordenadas de un sistema a otro.

Si observamos la **Fig. 4.3**, resulta

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB}$$

de esta manera se vinculan las posiciones en ambos sistemas.

Analicemos qué ocurre a medida que transcurre el tiempo. Si la partícula se mueve con respecto a B y además el sistema se mueve con respecto a A, los vectores posición cambiarán, tal que para un instante t' la posición del punto P respecto del sistema A será:

Escaneado con CamScanner

$$\vec{r}'_{PA} = \vec{r}'_{BA} + \vec{r}'_{PB}$$

Podemos hallar los desplazamientos

$$\Delta\vec{r}_{PA} = \Delta\vec{r}_{BA} + \Delta\vec{r}_{PB} \qquad (2)$$

con

$$\Delta\vec{r}_{PA} = \vec{r}'_{PA} - \vec{r}_{PA}$$
$$\Delta\vec{r}_{PB} = \vec{r}'_{PB} - \vec{r}_{PB}$$
$$\Delta\vec{r}_{BA} = \vec{r}'_{BA} - \vec{r}_{BA}$$

Si consideramos el intervalo de tiempo empleado para estos desplazamientos, podremos calcular:

$$\frac{\Delta\vec{r}_{PA}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_{BA}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}_{PB}}{\Delta t}$$

de acuerdo a lo visto anteriormente estas son velocidades medias, pero como ya sabemos pueden definirse también las instantá

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB} \qquad (3)$$

Hemos obtenido así la ***ley de adición de velocidades***, que nos dice cómo se transforman las velocidades de un sistema a otro.

Esta regla nos dice que si conocemos la velocidad de la partícula según B y le sumamos la velocidad del sistema B respecto de A (***velocidad de arastre*** del sistema B) obtenemos la velocidad según el sistema A (o a la inversa). La suma debe ser vectorial.

Haciendo un procedimiento análogo al anterior, podríamos ver cómo se transforman las aceleraciones, de un sistema a otro, tomando un intervalo de tiempo Δt y registrando los cambios de velocidad de la partícula en ese intervalo.

$$\frac{\Delta\vec{v}_{PA}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_{BA}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_{PB}}{\Delta t}$$

Si, como dijimos, todos los puntos del sistema B tienen la misma velocidad **constante**, entonces:

$$(\Delta v_{BA} / \Delta t) = 0$$

lo cual implica $\vec{a}_A = \vec{a}_B$ (4)

Las ***aceleraciones son las mismas en ambos sistemas*** (aunque no lo sean las respectivas velocidades).

Supongamos ahora, en cambio, que el sistema B se mueve de tal manera que su origen hace un movimiento rectilíneo uniformemente variado y sus ejes mantienen siempre la misma orientación. (Por supuesto, existen otros movimientos posibles de B con respecto a A, aparte de los dos ya dichos, pero no serán tratados en nuestro curso. Son, por ejemplo, rotaciones y traslaciones curvilíneas).

Luego, podemos usar

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{PB} \qquad (5)$$

Las expresiones (4) y (5) son de una enorme trascendencia y veremos sus implicaciones luego, en la Unidad 2 que corresponde a dinámica.

Hemos hablado de cómo se transforman posiciones, velocidades y aceleraciones, pero nada dijimos del tiempo, aunque cuando tomamos intervalos de tiempo para calcular las velocidades medias, simplemente dividimos por Δt todos los términos de la expresión (2), sin discriminar entre Δt_A y Δt_B. Al no hacer distinciones entre Δt_A y Δt_B estamos afirmando que el tiempo transcurre igualmente desde ambos sistemas de referencia. Aunque parezca extraño, esta afirmación no es válida para velocidades grandes, comparables con la de la luz. Pero para velocidades ordinarias es correcto decir $\Delta t_A = \Delta t_B$, y escribir explícitamente la llamada Transformación de Galileo:

$$\vec{r}_A = \vec{v}_{BA}\, t + \vec{r}_B$$
$$t_A = t_B$$

Escaneado con CamScanner

que permite calcular posiciones y tiempos en el sistema A conociendo posiciones y tiempos en el sistema B.

O sea con estas últimas y con las (3) y (5) podemos describir los movimientos del chico, camine corra salte se quede quieto o no, dentro de un tren que se desplaza uniformemente o aceleradamente por un tramo de vía recta; respecto de cualquier pasajero sentado o desde el andén de alguna estación, etc.

Veamos dos ejemplos, el primero de aplicación de este capítulo y el segundo para relacionar encuentros con movimiento relativo.

Ejemplo 4.1:

Un bote cruza un río de 30 m de ancho con una velocidad cuyo módulo es de 4 m/s con respecto al agua y orientado de tal forma que, si las aguas estuviesen en reposo, cruzaría perpendicularmente a las orillas. El bote parte de un punto O, ubicado sobre una de las orillas y llega a otro punto B ubicado sobre la otra orilla, distante 50 m. ¿Cuál es la velocidad del agua?

(Pista: Se trata de un cuerpo que es arrastrado, en su movimiento por un sistema que se mueve: el agua)

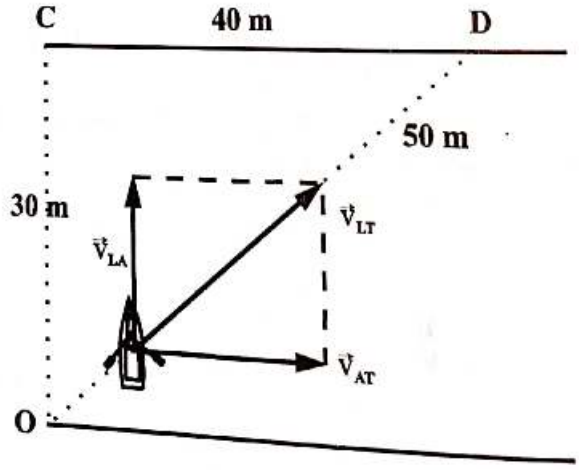


Fig. 4.4: Esquema descriptivo de la situación planteada.

Una forma sencilla de no equivocarse y no forzar la memoria es escribir la fórmula vectorial de transformación de velocidades la siguiente manera

$$\vec{V}_{AB} + \vec{V}_{BC} + \vec{V}_{CA} = 0 \qquad (6)$$

Note la rotación de los subíndices: AB, BC, CA. Se trata de una expresión muy simétrica y fácil de entender y recordar. En cuanto a A, B y C, son lo que uno desee: el sistema A, el B, el cuerpo, la lancha, lo que haga falta: siempre funciona bien.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 4.1:

Recordando esta otra expresión:

$$\vec{v}_{DE} = -\vec{v}_{ED}$$

que nos dice que si intercambiamos los subíndices debemos invertir el sentido del vector, que la velocidad del objeto D respecto del E es opuesta a la velocidad de E respecto de D.

Hecha esta introducción, elegimos:

A: Agua T: Tierra L: Lancha

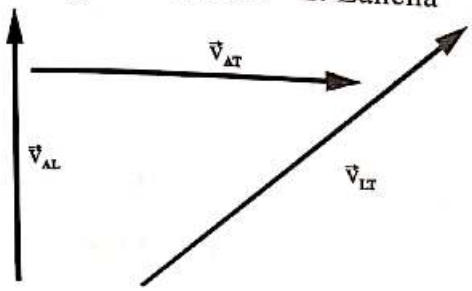


Fig. 4.5: Vectores útiles para la resolución del problema.

Para poder aplicar la igualdad (6) necesitamos poner algo así como

$$\vec{v}_{AT} + \vec{v}_{TL} + \vec{v}_{LA} = 0$$

pero hemos dibujado $\vec{v}_{LT}$ y no $\vec{v}_{TL}$.

Invertimos, pues el sentido del vector al tiempo que intercambiamos los subíndices:

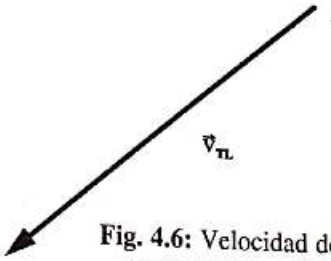


Fig. 4.6: Velocidad de la Tierra con respecto a la lancha.

Ahora sí aplicamos $\vec{v}_{AT} + \vec{v}_{TL} + \vec{v}_{LA} = 0$

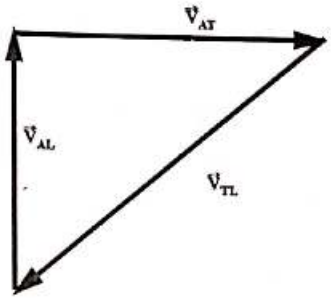


Fig. 4.7: Los tres vectores suman cero, pues forman un polígono cerrado.

Por semejanza

$$\frac{40\,m}{30\,m} = \frac{v_{AT}}{4\,m/s} \quad \therefore \boxed{v_{AT} = 5{,}33\,m/s}$$

Ejemplo 4.2:

Resolvamos ahora nuevamente el problema de encuentro (Ejemplo 2.1) pero desde un sistema de coordenadas sobre el automóvil que sale de Bs. As. En tal caso la posición de este automóvil será simplemente $x_1(t) = 0$ para todo instante de tiempo. El segundo automóvil se moverá uniformemente con velocidad $\vec{v}_{21}$ respecto de nuestro sistema de referencia (y del primer automóvil) partiendo de una posición inicial $x_2(0) = d$. La ecuación de movimiento es: $x_2(t) = d + v_{21}\,t$; y la velocidad v_{21} resulta de la superposición de la velocidad del segundo automóvil respecto de la tierra ($-v_2$: observe la dirección del eje +x) y la velocidad de la Tierra respecto del primer automóvil ($-v_1$: observe que la Tierra se mueve hacia -x).

Entonces $\vec{v}_{21} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, tal que:

$v_{21} = -(v_1 + v_2)$ y las ecuaciones de movimiento de ambos móviles son

$$x_1(t) = 0$$

$$x_2(t) = d - (v_1 + v_2)\,t$$

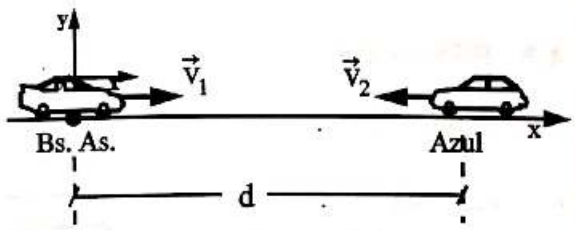


Fig. 4.8: Esquema de las condiciones iniciales con el sistema de referencia elegido.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 4.2:

En el instante de encuentro:

$$t = t_e \Rightarrow x_1(t_e) = x_2(t_e) = 0$$

$x_1(t_e) = 0$ se cumple inmediatamente, de modo que la condición de encuentro se reduce a que el segundo coche llegue al origen de coordenadas:

$$d - (v_1 + v_2)t_e = 0 \Rightarrow t_e = \frac{d}{(v_1 + v_2)} = 2h$$

que es la misma solución hallada anteriormente. El automóvil que partió desde Bs. As. reccorrió hasta ese instante la misma distancia que Bs. As. «viajó» respecto del origen de coordenadas. La ecuación de movimiento de Bs. As. será:

$$x_{BA}(t) = -v_1 t \Rightarrow$$

$$x_{BA}(t_e) = -v_1 t_e = \frac{-v_1 d}{(v_1 + v_2)} = -160km$$

$$x_{BA}(t_e) = -160km$$

¿Y Azul? Azul se mueve con igual velocidad que Bs. As. (la Tierra es rígida en ese movimiento) y «parte» a una distancia d del origen de coordenadas. Su ecuación de movimiento es:

$$x_{AZ}(t) = d - v_1 t \Rightarrow$$

$$x_{AZ}(t_e) = d - v_1 t_e =$$

$$= d + x_{BA}(t_e) = 140km$$

Si se coloca el sistema de coordenadas en el otro automóvil, manteniendo el sentido del eje x, las ecuaciones de movimiento de los móviles son:

$$x_1(t) = -d + (v_1 + v_2)t$$

$$x_2(t) = 0$$

(dedúzcalas)

Como antes

$$t_e = \frac{d}{(v_1 + v_2)}$$

$$x_{BA}(t) = -d + v_2 t \Rightarrow x_{BA}(t_e) = -160km$$

$$x_{AZ}(t) = v_2 t \Rightarrow x_{AZ}(t_e) = 140km$$

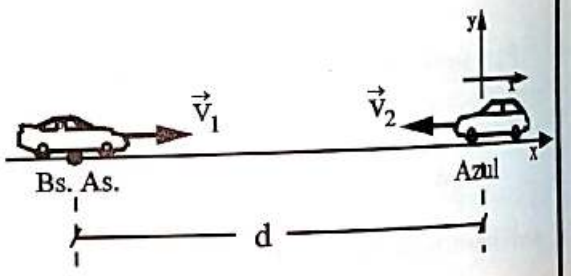


Fig. 4.9: Esquema de las condiciones iniciales pero con otro sistema de referencia.

Observe que en ambos casos las respectivas posiciones de las ciudades en el instante del encuentro coinciden, dado que en ese instante ambos sistemas coordenados se superponen (como los móviles).

Analice qué ocurre en el caso en que los automóviles viajan en el mismo sentido.

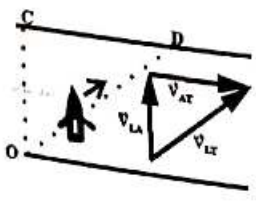
4.3 RESUMEN

Transformación de Galileo

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{AB}t + \vec{r}_{PB}$$

$$t_A = t_B$$

$$\vec{r}_{BA} = cte. \Rightarrow \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$



Cuando el sistema B se traslada con movimiento rectilíneo uniformemente variado respecto del sistema A

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{PB}$$

Y por último no olvidemos:

$$\vec{v}_{AT} + \vec{v}_{TL} + \vec{v}_{LA} = 0$$

Escaneado con CamScanner

CAPITULO 5 MOVIMIENTOS EN UN PLANO

5.1 ECUACIONES HORARIAS

TIRO OBLICUO

Hasta aquí hemos visto movimientos rectilíneos, en donde los vectores velocidad y aceleración son colineales (tienen la misma dirección). Sin embargo, hay casos donde esto no ocurre, y entonces el movimiento se realiza en una trayectoria curva. Un ejemplo simple es el llamado tiro oblicuo donde el vector aceleración es constante pero no es colineal con la velocidad.

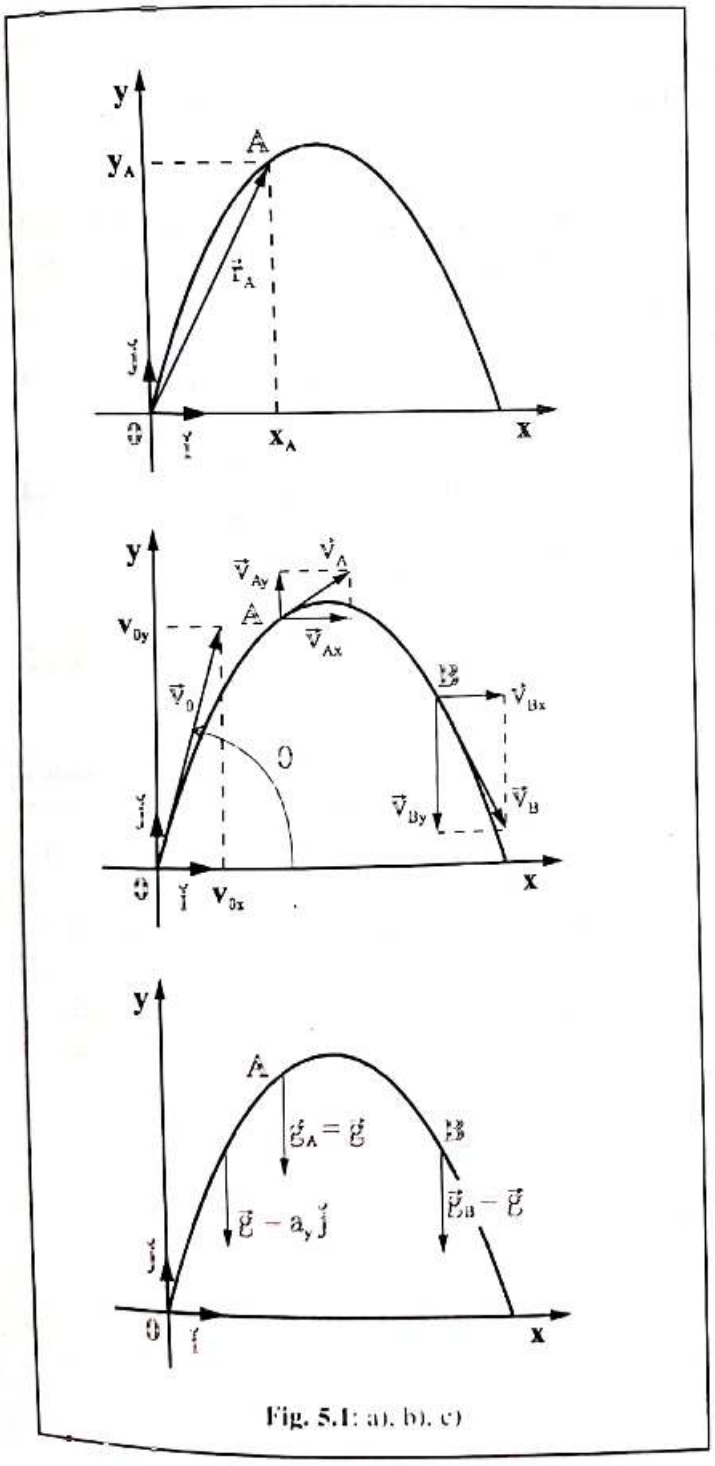


Fig. 5.1: a), b), c)

El lanzamieno de la pelota por elevación de un tiro libre en el fútbol, la aspersión de agua para riego, etc., son ejemplos de movimientos curvilíneos, bidimensionales de partículas que se mueven con la aceleración g (sin tener en cuenta la influencia del aire) que, como dijimos anteriormente, es un vector cuya dirección es vertical, su sentido hacia el centro de la Tierra y su módulo es constante y tiene el valor de 9,81 m/s² aproximadamente.

Las **Fig. 5.1** a), b) y c) ilustran el movimiento de una partícula que se mueve con una trayectoria curva en el plano x-y. El vector $\vec{r}_A = x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j}$ mide la posición o el desplazamiento a partir del origen de un sistema de referencia elegido (arbitrariamente) de tal forma que el eje positivo de las **y** está dirigido verticalmente hacia arriba.

La **Fig. b)** muestra el vector velocidad instantánea $\vec{v}_A = v_{Ax}\,\vec{i} + v_{Ay}\,\vec{j}$ que es tangente a la trayectoria en el punto A, y a $\vec{v}_B$ en general como ya sabemos la dirección de la $\vec{v}$ de la partícula es tangente en todos los puntos a la trayectoria.

Y como hemos señalado anteriormente, el vector aceleración $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$, tiene componentes $a_x = 0$, $a_y = -|g|$ como se observa en la **Fig. c)**, además de $\vec{g}_A$ y $\vec{g}_B$ que son iguales a $\vec{g}$.

Escaneado con CamScanner

Debemos recordar que estamos estudiando el movimiento de una partícula en un plano y que los vectores posición $\vec{r}$, velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$ son funciones del tiempo al igual que sus correspondientes componentes, es decir:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \quad \text{(recordar que } \mathbf{i} = \vec{i}\text{...)}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\mathbf{i} + v_y(t)\,\mathbf{j}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\mathbf{i} + a_y(t)\,\mathbf{j}$$

Estas últimas expresiones contienen importante información y a partir de las mismas deduciremos las ecuaciones horarias del tiro oblicuo, la ecuación de la trayectoria de la partícula y otras características del movimiento.

Que la componente según el eje x de la aceleración sea cero ($a_x = 0$) para todo instante de tiempo considerado, significa que en esa dirección la partícula tiene un movimiento uniforme. Esto implica que la velocidad según x será constante para todo instante t. Si la partícula se lanza con una velocidad inicial $\vec{v}_0$, vector cuyo módulo es v_0 y cuya dirección y sentido (flecha) forma un ángulo θ con el eje positivo de las x, entonces (debido al carácter vectorial de las magnitudes que describen este movimiento) podemos tratar independientemente lo que ocurre en la dirección **x** y en la dirección **y**:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta$$

donde v_{0x} y v_{0y} son las componentes x e y del vector velocidad inicial. Entonces

$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad (1)$$

para todo instante de tiempo. Como vimos anteriormente en el movimiento uniforme la coordenada x de la posición de la partícula en un instante t viene dada en general por la expresión:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$$

En este caso, como elegimos $x_0 = 0$, $t_0 = 0$

$$x = v_0 \cos\theta \; t \qquad (2)$$

En cambio, para la componente vertical tenemos $a_y = -|\vec{g}|$ para todo instante de tiempo, lo cual implica que en esa dirección la partícula se mueve con un movimiento uniformemente variado. Para este tipo de movimiento hemos visto que en general las componentes según y de la velocidad y de la posición son:

$$v_y = v_{0y} + a_y\,(t - t_0)$$

$$y = y_0 + v_{0y}\,(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\,a_y\,(t - t_0)^2$$

Reemplazando convenientemente en las expresiones anteriores $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta$, $a_y = -|\vec{g}|$, $y_0 = 0$, $t_0 = 0$ obtenemos:

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - |\vec{g}|\,t \qquad (3)$$

$$y = v_0 \operatorname{sen}\theta\; t - \frac{1}{2}\,|\vec{g}|\,t^2 \qquad (4)$$

5.2 TRAYECTORIA DEL TIRO OBLICUO

Las ecuaciones (2) y (4) dan la trayectoria de la partícula en la forma llamada paramétrica. Esto significa que le podemos dar valores a *t* y obtener valores de *x* e *y* que corresponden al mismo instante de tiempo. Si estos pares de valores (x,y) se grafican en un sistema de coordenadas, da una parábola. Si deseamos obtener la ecuación de esa parábola despejamos *t* de la ecuación (2):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

y reemplazando en (4):

$$y = \operatorname{tg}\theta\; x - \frac{|\vec{g}|}{2\,v_0^2 \cos^2\theta}\,x^2$$

Escaneado con CamScanner

En el caso más general en que el origen no está en el lugar de lanzamiento, la expresión tiene la forma:

$$y = \operatorname{tg}\theta\,(x - x_0) - \frac{|\vec{g}|}{2v_0^2\cos^2\theta}(x - x_0)^2$$

Esta ecuación se llama la parábola de tiro.

Analizaremos ahora algunos resultados en el tiro oblicuo.

Si queremos hallar el tiempo t_m que tarda la partícula en alcanzar la altura máxima y_m podemos partir de la condición de que la componente vertical v_y de la velocidaad en ese punto es cero. Usando la ecuación (3)

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta - |\vec{g}|\, t_m = 0$$

entonces despejando

$$t_m = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{|\vec{g}|} \qquad (6)$$

Para hallar la altura máxima y_m que alcanza en su trayectoria la partícula podemos reemplazar la expresión (6) en la ecuación (5)

$$y_m = v_0 \operatorname{sen}\theta \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{|\vec{g}|} - \frac{1}{2}|\vec{g}| \frac{(v_0 \operatorname{sen}\theta)^2}{|\vec{g}|^2}$$

$$\text{pero si } y_0 \neq 0 \Rightarrow y_m = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2\,|\vec{g}|} \qquad (7)$$

Si reemplazamos (6) en la ecuación (2) obtenemos la coordenada horizontal x_m correspondiente a la altura máxima.

$$x_m = \frac{v_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{|\vec{g}|} \qquad (8)$$

Si llamamos alcance del proyectil, A, a la coordenada x del punto de impacto de la partícula con el suelo, podemos encontrar A imponiendo la condición de que la ordenada de la partícula sea cero, es decir, $y(x = A) = 0$. Usando la ecuación de la parábola de tiro (5)

$$y = x\left(\operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2}\frac{|\vec{g}|}{v_0^2\cos^2\theta}x\right) = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, la solución trivial $x = 0$ que corresponde al instante inicial y otra solución:

$$x = A = \frac{2v_0^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{|\vec{g}|} = \frac{v_0^2}{|\vec{g}|}\operatorname{sen}(2\theta) \qquad (9)$$

Comparando las expresiones (8) y (9) resulta que

$$A = 2\,x_m$$

lo que era de esperar por la simetría de la parábola.

El ángulo de lanzamiento $\theta = 90°$ corresponde al tiro vertical hacia arriba y de las expresiones (6) y (7) se pueden obtener los mismos resultados del caso rectilíneo

$$t_m = \frac{v_0}{|\vec{g}|} \quad \text{e} \quad y_m = \frac{v_0^2}{2\,|\vec{g}|}$$

Demuestre que el alcance máximo A_m se obtiene para $\theta = 45°$.

Demuestre que si se lanza una partícula con, digamos 31°, tiene el mismo alcance que si se la lanza con 59°, porque 59°+31° = 90°.

Lo mismo ocurre para otros ángulos complementarios.

También se puede comprobar que para $\theta = 45°$ la altura máxima es igual a la cuarta parte del alcance.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 5.1:

Desde un puente que está a una altura h sobre el nivel de un río se lanza una piedra en forma horizontal con una velocidad $v_{0x} = 5$ m/s. La piedra tarda 4 segundos en hacer impacto sobre el agua. (Aproxime $|\vec{g}| = 10$ m/s²).

a) Calcule la altura h del puente.
b) ¿A qué distancia respecto del pie del puente la piedra hace impacto con el agua?
c) ¿Cuál es la componente vertical de la velocidad de la piedra v_y en el instante de hacer impacto con el agua?
d) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de impacto?

Es importante que elijamos un sistema de coordenadas conveniente para describir el movimiento de la piedra y resolver el problema. Hemos adoptado como origen de ese sistema la intersección entre el pie del puente y el nivel del río; el eje vertical y es positivo hacia arriba y el eje horizontal x es positivo hacia la derecha. Este ejemplo es de tiro horizontal, un caso particular de tiro oblicuo en el vacío.

Planteamos las ecuaciones de la posición y de la velocidad según los ejes **x** e **y** recordando que dado el sistema de coordenadas elegido, ***podemos descomponer el movimiento de la piedra en dos movimientos independientes, un Movimiento Rectilíneo Uniforme según la coordenada x y un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado según la coordenada y, en su forma más general las ecuaciones son***

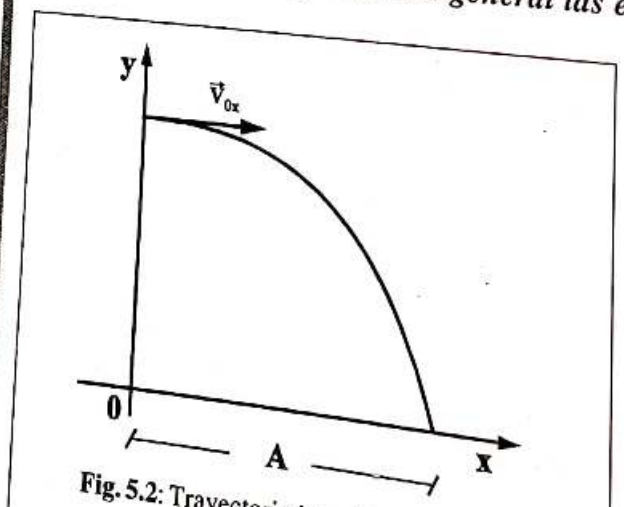


Fig. 5.2: Trayectoria de un Tiro Horizontal.

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_x (t - t_0)^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x (t - t_0)$$

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_y (t - t_0)^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y (t - t_0)$$

Pero en el caso planteado $x_0 = 0$; $y_0 = h$; $t_0 = 0$; $a_x = 0$; $a_y = -|\vec{g}|$ y por lo tanto, remplazando en las ecuaciones anteriores, tendremos que:

$$x = v_{0x}\, t \qquad (1)$$

$$v_x = v_{0x} \qquad (2)$$

$$y = h - \frac{1}{2} |\vec{g}|\, t^2 \qquad (3)$$

$$v_y = -|\vec{g}|\, t \qquad (4)$$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 5.1:

Para calcular la altura **h** del punto usamos la ecuación (3). Como sabemos que tarda 4 segundos en hacer impacto en el agua y que en ese instante la piedra está en y = 0, entonces

$$0 = h - \tfrac{1}{2}\ 10\ m/s^2\ (4\ s)^2$$

$$h = \tfrac{1}{2}\ 10\ m/s^2\ 16\ s^2$$

$$\boxed{h = 80\ m}$$

Usando la ecuación (3) podemos hallar directamente la distancia A a la cual la piedra hace impacto en el agua respecto del pie del puente:

$$A = 5\ m/s\ 4\ s$$

$$\boxed{A = 20\ m}$$

La respuesta **c)** se encuentra usando la ecuación (4)

$$v_y = -\ 10\ m/s^2\ 4\ s$$

$$\boxed{v_y = -\ 40\ m/s}$$

d) El módulo de la velocidad de impacto se calcula a partir de

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{(5\ m/s)^2 + (-40\ m/s)^2}$$

$$\boxed{v = 40{,}31\ m/s}$$

Ejemplo 5.2:

Un cañón dispara un proyectil con una velocidad inicial de 500 m/s con un ángulo de 30° respecto de la horizontal. Hallar:

a) Cuánto tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima.
b) La altura máxima.
c) El alcance.

Adoptamos como sistema de referencia el indicado en la **Fig. 5.3**

tomando $t_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos 30°$,

$v_{0y} = v_0$ sen 30 °, $a_x = 0$, $a_y = -|\vec{g}|$,

obtenemos:

$$x = v_0 \cos 30°\ t \qquad (1)$$

$$y = v_0 \text{ sen } 30°\ t - \frac{1}{2}\ |\vec{g}|\ t^2 \qquad (2)$$

$$v_y = v_0 \text{ sen } 30° - |\vec{g}|\ t \qquad (3)$$

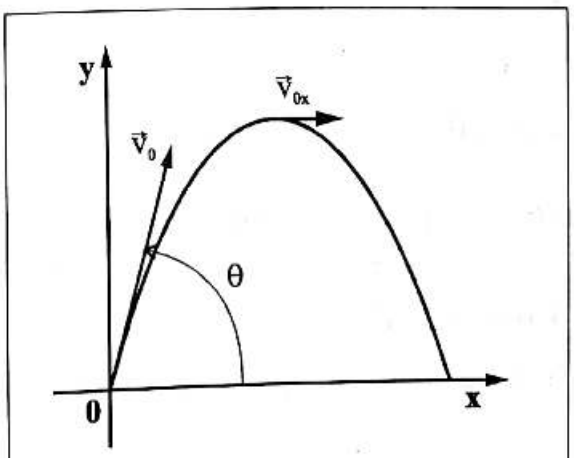


Fig. 5.3: Esquema de las condiciones inicilales

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 5.2:

Cuando el proyectil alcanza su altura máxima la componente vertical v_y de la velocidad es cero, por lo tanto, usando (3):

$$0 = 500 \text{ m/s } 0{,}5 - 10 \text{ m/s}^2 \, t$$

despejando t:

$$t = \frac{250 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2}$$

$$t = 25 \text{ s}$$

La altura máxima es alcanzada en 25 segundos, por lo tanto, usando la ecuación (2) y reemplazando convenientemente:

$$y_m = 500 \text{ m/s } 0{,}5 \, 25 \text{ s} - \frac{1}{2} 10 \text{ m/s}^2 \, (25 \text{ s})^2$$

$$\boxed{y_m = 3125 \text{ m}}$$

Hemos deducido anteriormente que el alcance es igual a

$$A = \frac{v_0^2}{|\vec{g}|} \operatorname{sen}(2\theta)$$

por lo tanto:

$$A = \frac{(500 \text{ m/s})^2}{10 \text{ m/s}^2} \operatorname{sen} 60°$$

$$A = \frac{250000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{10 \text{ m/s}^2} 0{,}866$$

$$\boxed{A = 21650 \text{ m}}$$

5.3 RESUMEN

Con el sistema de referencia elegido en el texto y $t_0 = 0$

$$x(t) = v_{0x} \, t$$

$$v_x(t) = v_{0x}$$

$$a_x(t) = 0$$

$$y(t) = v_{0y} \, t - \frac{1}{2} |\vec{g}| \, t^2; \text{ para } y_0 = 0$$

$$v_y(t) = v_{0y} - |\vec{g}| \, t$$

$$a_y = - |\vec{g}|$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \theta$$

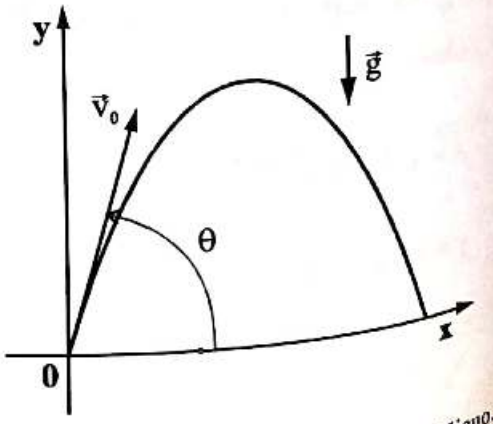


Fig. 5.4: Trayectoria, $\vec{v}_0$, $\vec{g}$ en un Tiro Oblicuo.

Escaneado con CamScanner

CAPITULO 6 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

6.1 INTRODUCCION

Consideremos ahora el caso de una partícula moviéndose en una trayectoria que es una circunferencia, por ejemplo

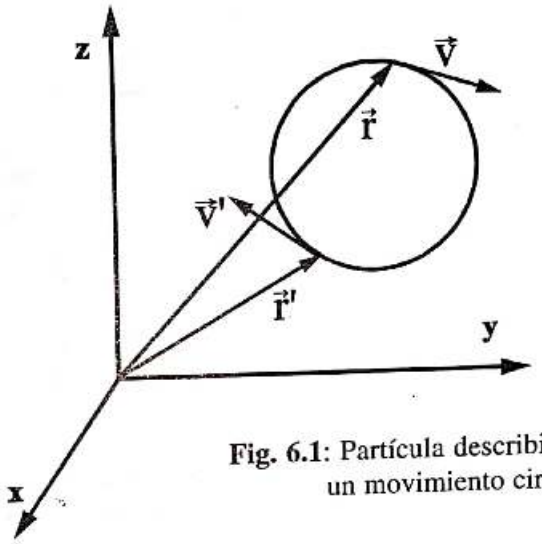


Fig. 6.1: Partícula describiéndo un movimiento circular.

Es evidente que resulta más cómodo tomar el centro de la misma como origen de coordenadas, pues de esta manera el vector posición resulta de módulo constante. Además, trabajando en el plano de la trayectoria circular, podemos tomar sólo dos ejes, simplificando la descripción.

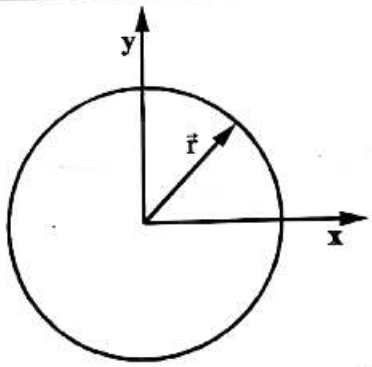


Fig. 6.2: Sistema de referencia elegido.

6.2 VELOCIDAD ANGULAR Y TANGENCIAL.

El movimiento de una partícula que describe una circunferencia se denomina ***circular***. En este tipo de movimiento el vector velocidad cambia punto a punto ya sea en módulo y dirección o al menos en dirección, como se muestra en la **Fig. 6.3**.

Escaneado con CamScanner

En el caso que la partícula recorra arcos iguales en tiempos iguales se tiene lo que se conoce como Movimiento Circular Uniforme (MCU). Definimos la velocidad angular ω como el cociente entre el ángulo $\Delta\theta$ barrido por el vector posición de la partícula y el intervalo de tiempo Δt transcurrido.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = cte$$

La velocidad angular ω se mide en radianes por unidad de tiempo (recordar que un círculo completo, o sea 360°, equivale a $2\pi = 6{,}28$ radianes. Ver apéndice matemático). Como el radián es un número adimensional, la dimensión le ω resulta

$$[\omega] = 1/\text{tiempo} = \text{tiempo}^{-1}$$

por lo tanto sus unidades serán: s^{-1}, min^{-1}, h^{-1}, etc.

El concepto de velocidad angular puede emplearse también para trayectorias que no sean circunferencias:

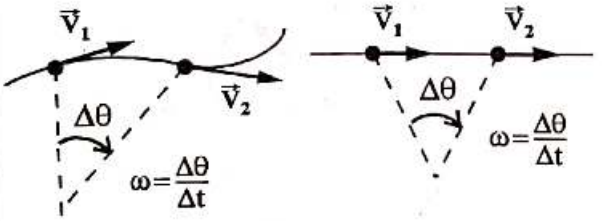


Fig. 6.5: ω en distintas trayectorias.

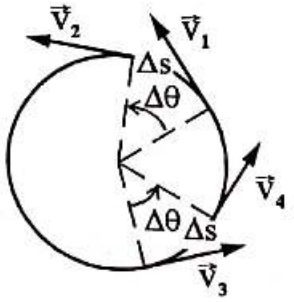


Fig. 6.6: Arcos de curva Δs, variaciones angulares y vectores velocidad.

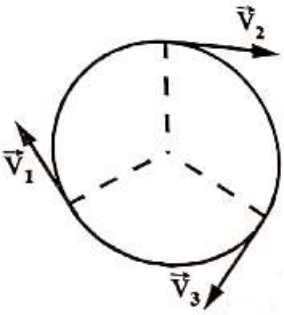


Fig. 6.3: Variación del vector velocidad en un movimiento circular.

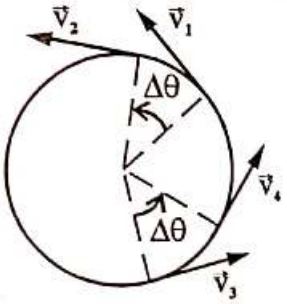


Fig. 6.4: Variaciones de velocidad y variaciones angulares $\Delta\theta$.

En el Movimiento Circular Uniforme, al ser ω constante, también lo es el módulo del vector velocidad, que suele denominarse velocidad tangencial. (Esta denominación se utiliza para diferenciarla de la velocidad angular, ya que todas las velocidades son tangenciales a la trayectoria).

Se definió $$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

pero en una circunferencia: $$\Delta\omega = \frac{\Delta s}{r}$$

donde Δs es el arco de aquella parte de la circunferencia de radio r subtendida por el ángulo $\Delta\theta$.

Por lo tanto $$\omega = \frac{1}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

y como $\Delta s/\Delta t$ es el módulo de la velocidad tangencial $\vec{v}$ que denotamos con v de aquí en más, resulta que:

$$\omega = \frac{v}{r} \quad o \quad v = \omega r$$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 6.1:

La Tierra tarda un día en dar una vuelta alrededor de su eje, siendo su radio medio de 6370 km. Si no se tiene en cuenta el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, a) ¿cuál es la velocidad tangencial respecto a un sistema fijo a las estrellas, de una persona parada sobre el ecuador al nivel del mar? b) ¿Y de una persona situada a 60° de latitud?.

En este problema lo que se pide es el módulo de la velocidad tangencial debida a la rotación de la Tierra. Sabemos que $v = \omega R$ donde R es el radio de giro de la persona en cuestión. La Tierra da una vuelta por día, o sea un punto de la misma (cualquiera) barre un ángulo de 2π radianes cada 24 horas, o sea cada 86400 segundos. Como R = 6370 km = 6370000 m, entonces

a)

$$v = \frac{2\pi}{86400\ s}\ 6370000\ m$$

$$\boxed{v = 463{,}24\ m/s}$$

b)

Una persona a 60° de latitud tiene un radio de giro que ya no es R sino

$$R' = R \cos 60°$$

mientras que su velocidad angular no cambia. Entonces:

$$v' = \omega R' = \omega R \cos 60°$$

$$\boxed{v' = 231{,}62\ m/s}$$

¿Cuál es la velocidad de una persona parada en alguno de los polos?

6.3 PERIODO Y FRECUENCIA - ECUACION HORARIA

El Movimiento Circular Uniforme es un movimiento que se denomina periódico ya que por cada punto de la trayectoria el móvil pasa reiteradamente a intervalos iguales de tiempo. En dicho punto la velocidad del móvil es siempre la misma en módulo, dirección y sentido.

En este tipo de movimiento se llama ***período*** (T) al tiempo empleado en efectuar un giro completo.

Como $\Delta\theta = \omega\ \Delta t$ y en una vuelta $\Delta t = T$ y $\Delta\theta = 2\pi$, se tiene que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad [T] = \text{tiempo}$$

Por otro lado se conoce como ***frecuencia*** (f) al número de vueltas que da la partícula por unidad de tiempo. Como un giro requiere un tiempo igual a un período:

$$f = \frac{1\ giro}{T} = \frac{1}{T} \qquad [f] = \text{tiempo}^{-1}$$

A la unidad s^{-1} se la denomina **Hertz** (Hz). Otra unidad muy común para frecuencia es r.p.m., revoluciones por minuto (1rpm = 1/60 Hz).

Por último, se puede escribir

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Escaneado con CamScanner

Si un móvil tiene una velocidad angular ω determinada, resulta por definición:

$$\Delta\theta = \omega\ \Delta t$$

Si se toma como eje de referencia el de las abscisas para medir el ángulo (podría ser cualquier otro) entonces una partícula que en $t = 0$ se encuentre en un punto de la trayectoria circular de ángulo θ_0, como se ve en la **Fig. 6.7**, tendría una ecuación de movimiento dada por:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega\ (t - t_0)$$

En esta ecuación ω tendrá signo positivo si $\theta(t)$ aumenta con el tiempo y negativo en caso contrario.

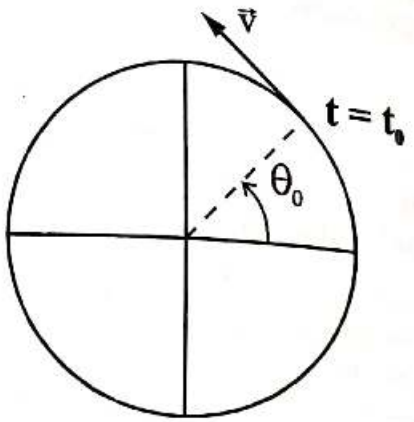


Fig. 6.7: Representación de la posición inicial, para un $\theta_0 \neq 0$.

Ejemplo 6.2:

Las agujas horaria y del minutero de un reloj coinciden a las 12 hs. ¿Qué ángulo formarán a las 12:30?

Lo primero que es necesario conocer son las velocidades angulares de ambas agujas. La aguja horaria da una vuelta cada 12 hs, por lo tanto:

$$\omega_h = \frac{2\,\pi}{12\ \text{h}} = \frac{2\,\pi}{43200\ \text{s}} = 1{,}45\ 10^{-4}\ \text{s}^{-1}$$

mientras que el minutero lo hace cada hora, así que:

$$\omega_m = \frac{2\,\pi}{3600\ \text{s}} = 1{,}74\ 10^{-3}\ \text{s}^{-1}$$

Las ecuaciones horarias de ambas agujas serán:

$$\theta_h = \theta_{h0} + \omega_h\ (t - t_0)$$

$$\theta_m = \theta_{m0} + \omega_m\ (t - t_0)$$

Para las dos agujas $\theta_{h0} = \theta_{m0} = 0$ (se cuentan los ángulos a partir del eje vertical) y $t_0 = 0$, por lo que los ángulos barridos por ellas al cabo de 30 min serán:

$$\theta_h = \omega_h\ 30\ 60\ \text{s}$$

$$\theta_h = 1{,}45\ 10^{-4}\ \text{s}^{-1}\ 1800\ \text{s} = 0{,}261\ \text{(rad)}$$

$$\theta_m = \omega_m\ 30\ 60\ \text{s}$$

$$\theta_m = 1{,}74\ 10^{-3}\ \text{s}^{-1}\ 1800\ \text{s} = 3{,}132\ \text{(rad)}$$

O sea que el ángulo formado por las dos agujas 30 minutos después de las 12 hs será:

$$3{,}132\ \text{(rad)} - 0{,}261\ \text{(rad)} = 2{,}871\ \text{(rad)}$$

$$1\ \text{(rad)} = 180°/\pi \Rightarrow 2{,}871\ \text{(rad)} \approx 164{,}5°$$

Escaneado con CamScanner

ACELERACION

En el Movimiento Circular Uniforme la velocidad tangencial tiene módulo constante, pero el vector que la representa cambia punto a punto a lo largo de la trayectoria al modificarse su dirección (**Fig. 6.8 a**). El vector velocidad tangencial se modifica, en otras palabras existe una aceleración y para que $|\vec{v}| = cte.$, dicha aceleración sólo puede ser perpendicular a la circunferencia que describe la partícula en este tipo de movimiento. Llevando los vectores velocidad tangencial a un origen común se puede obtener, por diferencia, el vector $\Delta\vec{v}$ que representa la variación de dicha velocidad (**Fig. 6.8 b**)

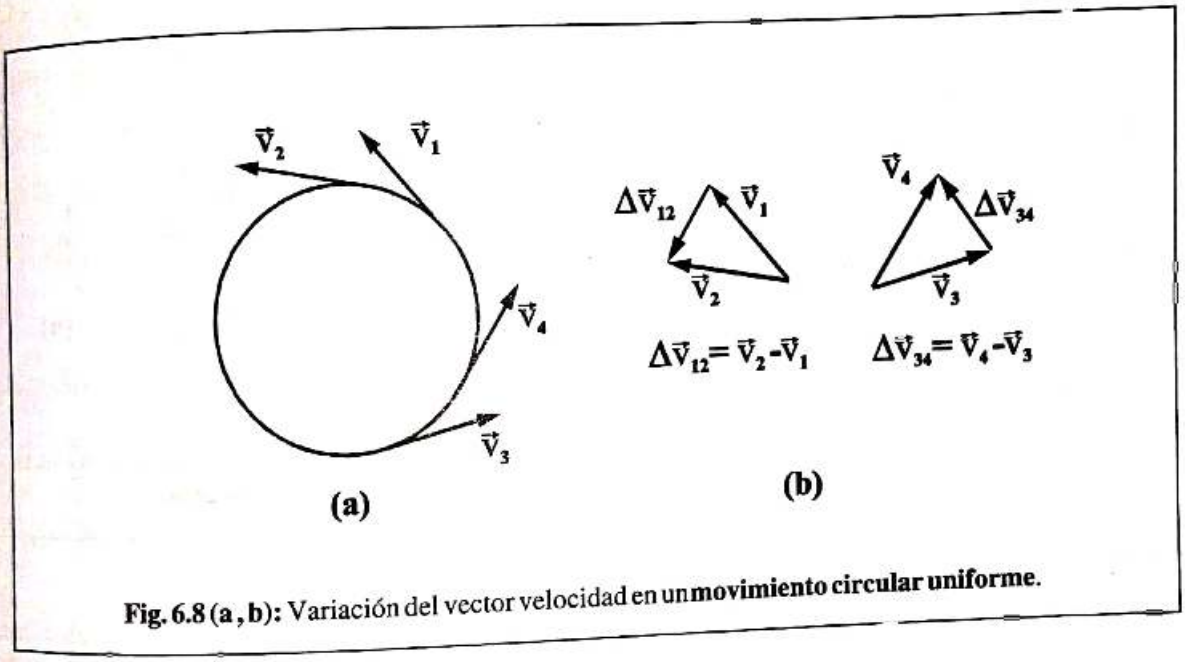


Fig. 6.8 (a , b): Variación del vector velocidad en un **movimiento circular uniforme.**

Esta diferencia puede hacerse con cualquier par de vectores velocidad tangencial. En particular, tomando los vectores correspondientes a dos puntos de la trayectoria muy cercanos, o sea separados por un ángulo muy pequeño, se puede ver (**Fig. 6.9**) que $\Delta\vec{v}$ es casi perpendicular a $\vec{v}$. En el límite de $\Delta\theta$ pequeño (o lo que es lo mismo para pequeños intervalos de tiempo Δt entre dos posiciones de la partícula), $\Delta\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{v}$. Como $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$, entonces $\vec{a}$ tiene igual dirección que $\Delta\vec{v}$, o sea que es perpendicular a la trayectoria y está radialmente dirigida hacia el centro de la misma (**Fig. 6.10**).

Esta aceleración normal, que determina que cambie la dirección del vector velocidad pero no su módulo, recibe el nombre de ***aceleración centrípeta*** y se la designa $\vec{a}_c$.

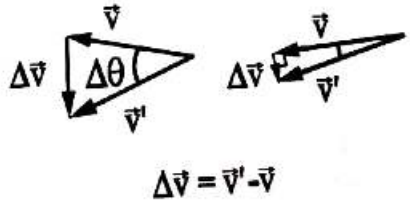


Fig. 6.9: Variación del vector velocidad para dos instantes muy próximos en un **movimiento circular uniforme.**

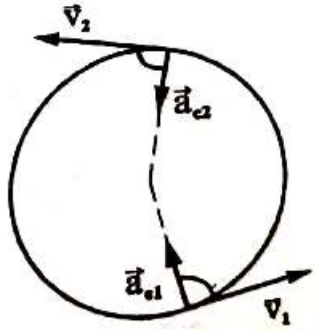


Fig. 6.10: Vector velocidad y vector aceleración centrípeta en un **movimiento circular uniforme.**

Escaneado con CamScanner

De la **Fig. 6.11 a** se puede ver que el ángulo $\Delta\theta$ entre dos puntos de la trayectoria en los cuales la partícula tiene velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ es el mismo que existe entre los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ cuando son llevados a un origen común, ya que ángulos entre perpendiculares son iguales.

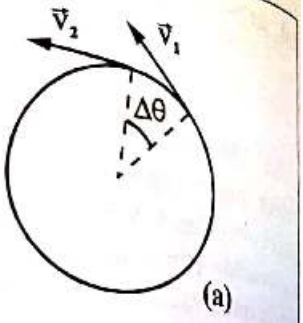


Fig. 6.11 a): Trayectoria y vectores velocidades.

Haciendo $\Delta\theta$ cada vez menor, el vector $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ tiende a confundirse con el arco $\Delta s'$ de una circunferencia (no la de la trayectoria) generada por la punta del vector velocidad a medida que se lo va dibujando a partir de un origen único y que por lo tanto tiene como radio el módulo de ese vector velocidad, que es constante en el Movimiento Circular Uniforme. Esta «trayectoria» en un espacio de velocidades se denomina ***hodógrafa*** (**Fig. 6.11 b**). Como en una circunferencia el arco comprendido por determinado ángulo es igual a dicho ángulo por el radio

$$|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}|\ \Delta\theta \quad \text{y si} \quad |\Delta\vec{v}| = \Delta v\ ,\ |\vec{v}| = v; \quad \text{entonces}$$

$$a_c = \Delta v/\Delta t = v\ \Delta\theta/\Delta t = v\ \omega; \quad \text{ya que } \Delta\theta/\Delta t = \omega$$

como vimos anteriormente.

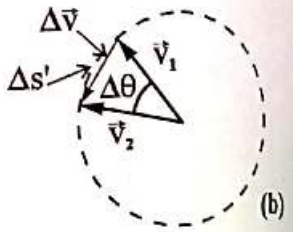


Fig. 6.11 b): "Trayectoria" del vector velocidad, **hodógrafa**.

Recordando que $v = r\ \omega$, se tiene el valor de la aceleración centrípeta en función de la velocidad angular o de la tangencial:

$$a_c = r\ \omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

En este razonamiento nos hemos apoyado en la noción intuitiva de que la aceleración puede concebirse como una especie de «velocidad de la velocidad».

Ejemplo 6.3:

a) ¿Cuál es la aceleración a que se encuentra sometida una prenda de ropa en la pared de un tambor de una centrifugadora de 60 cm de diámetro que gira a 640 rpm? b) ¿Y cuál la correspondiente a la Luna que realiza un giro alrededor de la Tierra cada 27,3 días, siendo la distancia Tierra-Luna de $3{,}85 \times 10^8$ m?

a) 640 rpm son 10,66 vueltas por segundo. Como cada vuelta son 2π radianes entonces:

$$\omega = 2\ \pi\ 10{,}66\ 1/s$$

$$a_c = r\ \omega^2 = 0{,}3\ m\ (2\pi\ 10{,}66\ 1/s)^2 = 1345{,}8\ m/s^2$$

¡Este valor equivale a 137 g!

b) Luna: Nuestro satélite natural da una vuelta cada 27,3 días; son 2358720 segundos

$$\omega = \frac{2\ \pi}{2358720\ s} = 2{,}664\ 10^{-6}\ s^{-1}$$

Esta velocidad angular tan baja explica por qué es tan difícil distinguir el movimiento de la Luna y que sólo se lo pueda detectar al observar sus distintas posiciones angulares respecto del Sol a lo largo de los días. Sin embargo la velocidad tangencial (su módulo) vale:

$$v = R\ \omega = 1{,}0256\ km/s$$

y por lo tanto:

$$a_c = R\ \omega^2 = \frac{v^2}{R} = 2{,}732\ 10^{-3}\ m/s^2$$

¡Este valor corresponde a $2{,}7\ 10^{-4}$ g!

Escaneado con CamScanner

6.5 RESUMEN

Definiciones:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = cte$$

Ecuaciones:

$$v = r\,\omega$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega\,(t - t_0)$$

$$a_c = r\,\omega^2 = \frac{v^2}{r} = v\,\omega$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Escaneado con CamScanner

7.1 COORDENADAS INTRINSECAS

Hemos considerado ejemplos en los que aparecen caminos con vehículos que se desplazan en ellos, y especificamos en su momento que eran rectos y aplicamos el tratamiento para movimientos rectilíneos (uniformes o variados).

Naturalmente, podríamos haber resuelto sin ninguna dificultad los mismos ejercicios sobre caminos curvos, con sólo hacer caso omiso de la curvatura y considerar que la variable llamada x correspondía a distancias marcadas sobre la curva. Ese eje x de representación sería una especie de planchado o rectificación de la trayectoria curva.

Para evitar la falta de rigor y verdad que cometeríamos si consideráramos recto lo que es curvo (recordemos que si se marcha a velocidad de módulo constante pueden, sin embargo, aparecer aceleraciones transversales), es usual introducir las coordenadas curvilíneas:

s(t): coordenada curvilínea (en una ruta, número de kilómetro del mojón)

v(t): velocidad escalar, (vale $|\vec{v}|$ ó - $|\vec{v}|$, según el móvil se desplace en el sentido +s ó en el opuesto).

a(t): aceleración escalar, (vale $|\vec{a}|$ ó - $|\vec{a}|$, donde $\vec{a}$ es la componente del vector a- en la dirección tangencial local de la trayectoria).

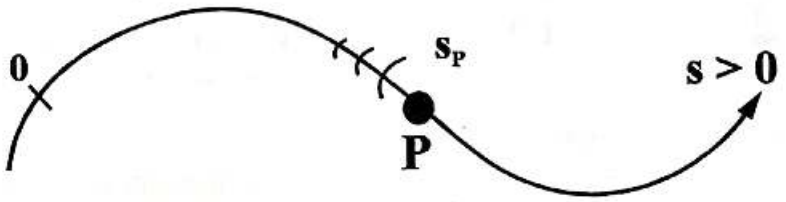


Fig. 7.1: Movimiento de una partícula en una trayectoria curva.

Las funciones s(t), v(t) y a(t) están relacionadas entre sí de la misma manera en la que lo estaban x(t), $v_x(t)$ y $a_x(t)$ en trayectorias rectas, o sea que v es la pendiente de la gráfica de s(t), y la aceleración escalar es la pendiente de la gráfica de v(t).

Notemos que estas tres variables, s, v, a son escalares, no vectoriales.

No debemos incurrir en la confusión de creer que en estas variables curvilíneas v sea el módulo del vector velocidad, o a el módulo del vector aceleración o s el módulo del vector posición. NO; lo único que vale es que $v = |\vec{v}|$ ó, $v = - |\vec{v}|$, según el caso. En cuanto a la aceleración escalar su módulo es igual al de la componente tangencial del vector $\vec{a}$, y s no guarda ninguna relación sencilla con $\vec{r}$.

Escaneado con CamScanner

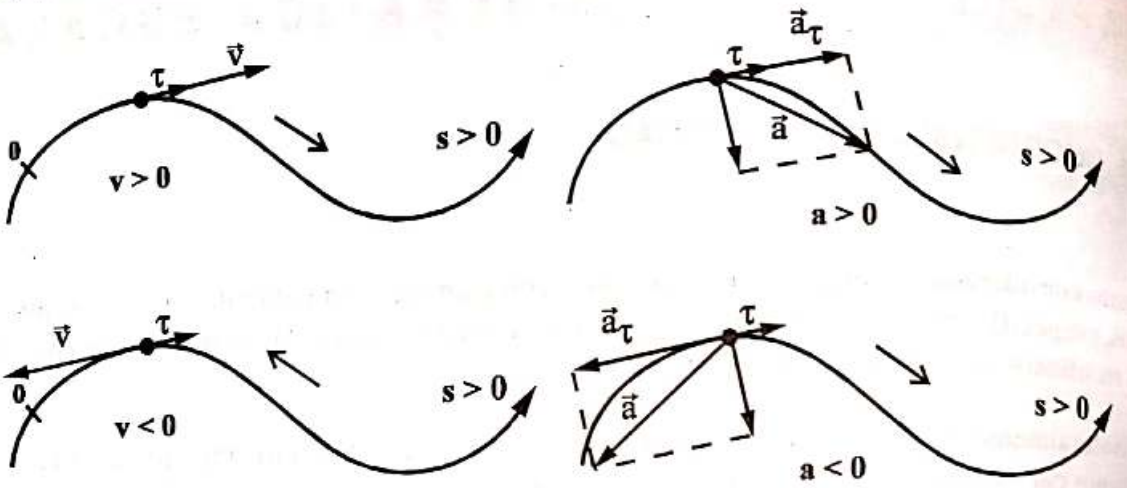


Fig. 7.2: Velocidades y aceleraciones vectoriales y escalares.

Es práctico imaginar un par de ejes coordenados ortogonales (o sea en ángulo recto) que acompañen a la partícula en su movimiento.

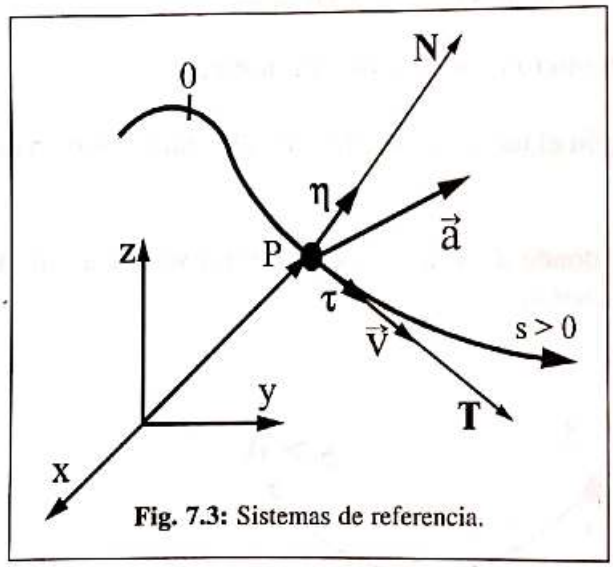


Fig. 7.3: Sistemas de referencia.

Un eje es tangente a la trayectoria y dirigido hacia el sentido s positivo; el otro es perpendicular, también llamado normal, dirigido hacia la parte cóncava de la curva.

En cada instante, la partícula tiene asociados un vector posición $\vec{r}$, un vector velocidad $\vec{v}$ y un vector aceleración $\vec{a}$, según se ha explicado.

Ahora bien, la coordenada s es la posición del móvil sobre la trayectoria, medida sobre la curva a partir del origen, la velocidad escalar v es, aparte de un signo + ó -, el módulo del vector velocidad y el vector aceleración $\vec{a}$ tiene dos componentes en relación con el sistema de los ejes **N** y **T**.

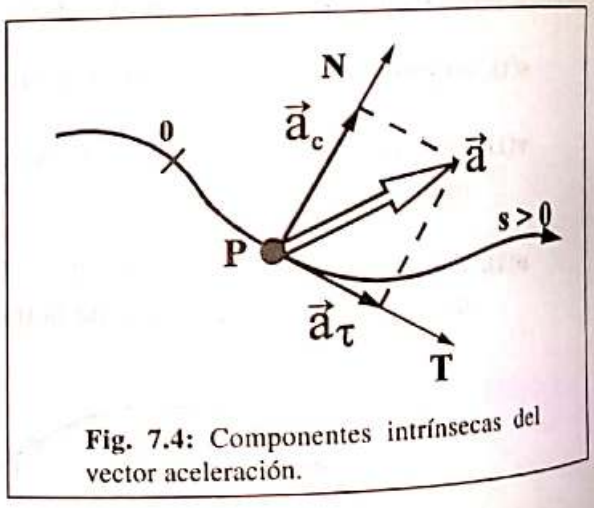


Fig. 7.4: Componentes intrínsecas del vector aceleración.

La componente $\vec{a}_c$, o sea la componente perpendicular, transversal o normal, se llama aceleración centrípeta, y se calcula con

$$|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$$

donde R es el radio de curvatura local (¡no es el vector posición!).

Una idea no muy rigurosa, pero sí intuitiva, del radio de curvatura es la siguiente:

Tomemos un segmento pequeño de la trayectoria y busquemos qué circunferencia ajusta mejor en él. El radio de esa circunferencia es el radio de curvatura local.

Escaneado con CamScanner

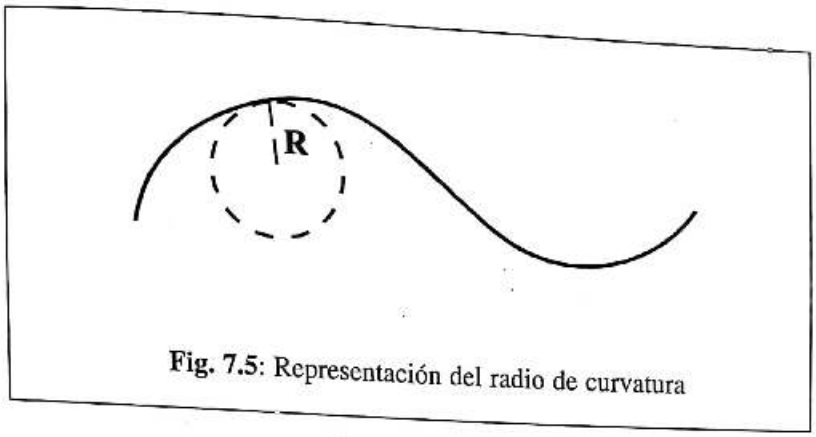


Fig. 7.5: Representación del radio de curvatura

La otra componente, $\vec{a}_\tau$, tiene su módulo igual al de la aceleración escalar, $|\vec{a}_\tau| = |a|$; donde

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Si $|\vec{v}|$ es constante, $\vec{a}_\tau$ vale cero, pero $\vec{a}_c$ es diferente de cero cuando el móvil se mueve sobre partes curvas de la trayectoria.

Escaneado con CamScanner

UNIDAD 2 DINAMICA

CAPITULO 1 LEYES DE LA DINAMICA

1.1 INTRODUCCION

En el tema que ahora comenzamos, dinámica, introduciremos el concepto de **fuerza** y el de **masa** y los relacionaremos con el movimiento de los cuerpos.

Así, veremos cómo el aplicar una fuerza sobre una partícula **modifica** su vector velocidad. Es decir, estudiaremos los principios generales que describen los efectos que las fuerzas producen sobre los cuerpos, en especial sobre su movimiento.

1.2 CONCEPTO INTUITIVO DE FUERZA

Cuando empujamos un mueble, cuando sostenemos una valija, cuando aceleramos una bicicleta, decimos que estamos ejerciendo una fuerza. Esta noción intuitiva es la base para la acepción rigurosa que en física se le da a la palabra «fuerza». Sin embargo, expresiones como «el granizo cayó con mucha fuerza», según veremos, no son acertados en su lenguaje físico. Podemos romper un cuerpo, deformarlo, equilibrarlo, desequilibrarlo o modificar los vectores velocidad de las partículas que lo conforman. La definición rigurosa de fuerza debe tener en cuenta sus efectos.

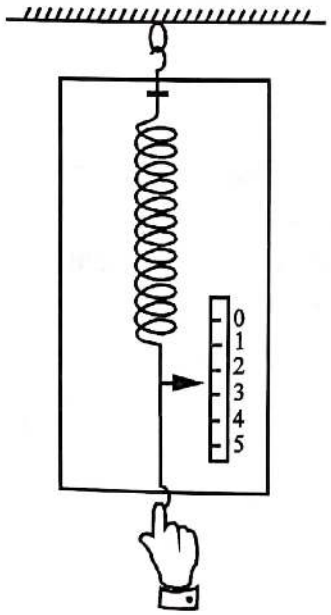


Fig. 1.1: Dinamómetro.

Una característica importante es su direccionalidad: podemos ejercer diversas fuerzas sobre el mismo cuerpo en diferentes direcciones. Esto nos sugiere considerar a la magnitud física fuerza como un **vector**: tiene intensidad (módulo), dirección y sentido.

Para cuantificar estas nociones intuitivas utilizamos un resorte (o dinamómetro). Si se fija uno de sus extremos y sobre el otro se actúa con la fuerza que deseamos medir, se obtiene un estiramiento o una compresión, cuya cuantía determina la intensidad de la fuerza* (ver **Fig. 1.1**).

A esta altura nuestra primera definición de fuerza es «aquello que estira un dinamómetro». A lo largo de este capítulo daremos más rigor a esta definición.

** Es esencial que se trate de un resorte sin histéresis. Esto quiere decir que cada vez que se deforma debe recuperar su longitud original al suprimirse las fuerzas que sobre él se ejercieron. Todo resorte puede dejar de recuperar su forma original si se ejerce sobre él fuerzas demasiado grandes. Por lo tanto, debemos elegir resortes que sean adecuados para las fuerzas que deseamos medir.*

Escaneado con CamScanner

Al elegir la graduación de la escala* estamos eligiendo una unidad de fuerza arbitraria. Se acepta por convención internacional una unidad que en el sistema MKS es el Newton (N). Otra unidad y que corresponde al sistema técnico, es el kilogramo fuerza (lo abreviaremos kgf). Un kgf es el peso de la masa patrón (kilogramo masa) en condiciones normales ($|\vec{g}|=9.80665$ m/s²)

La relación entre estas dos unidades es

$$1 \text{ kgf} = 9{,}81 \text{ N} \; ; \; 1 \text{ N} = 1/9{,}81 \text{ kgf}$$

El valor 9,81 m/s² corresponde al de la aceleración de la gravedad, $\vec{g}$, en la superficie de la Tierra.

Ejemplo 1.1:

a) Se desea expresar en Newton una fuerza de 50 kgf.

$$50 \text{ kgf} = 50 \cdot 9{,}8 \text{ N} = 490 \text{ N}$$

b) Se desea expresar en kgf una fuerza de 294 N.

$$294 \text{ N} = 294 \cdot 1/9{,}8 \text{ kgf} = 30 \text{ kgf}$$

El kgf es la unidad utilizada cotidianamente en el comercio y la industria. El Newton, que se utiliza en el trabajo científico, vale aproximadamente la décima parte de 1 kgf (≈100 gramos fuerza).

1.2.1 COMPOSICION DE FUERZAS. RESULTANTES

A menudo hay varias fuerzas ejercidas al mismo tiempo sobre un mismo cuerpo. Si se trata de una partícula son fuerzas «concurrentes», es decir, están todas aplicadas en un mismo punto. Para estudiar mejor el efecto de dichos **sistemas de fuerzas**, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Existe acaso una fuerza única capaz de producir sobre el cuerpo el mismo efecto que el sistema de fuerzas dado? Si existe, a esa fuerza la llamaremos «resultante» del sistema, y nos permite simplificar mucho el problema, ya que una vez determinada la resultante (si existe), podemos siempre trabajar con una única fuerza. La respuesta a la pregunta no es sencilla en el caso general (cuerpos extensos, fuerzas no concurrentes). En el caso de una partícula, que es el que nos ocupará por el momento, la experiencia muestra que todo sistema de fuerzas concurrentes admite resultante; en otras palabras

Si sobre una partícula actúan varias fuerzas, en todos los casos existe una única fuerza, llamada **resultante** del sistema de fuerzas, que producirá por sí sola idéntico efecto al producido por el sistema. (Por producir idéntico efecto debe entenderse producir la misma aceleración)

** Para graduar la escala se procede así: Se cuelgan pesos sucesivos cuya igualdad se verificaría porque estiran igualmente el resorte, cada uno de ellos por separado. Luego de colocar cada peso, y una vez alcanzado el equilibrio, se procede a la marcación de la escala. Si las marcas estuvieren igualmente espaciadas, se dirá que el resorte cumple la ley de Hooke.*

Escaneado con CamScanner

Además, de la experiencia surge cómo averiguar la resultante:

La resultante de un sistema de fuerzas aplicadas sobre una partícula se obtiene efectuando la **suma vectorial** de todos los vectores fuerza que componen dicho sistema*.

Ejemplo 1.2:

Si sobre una partícula actúan dos fuerzas, $\vec{F}_1$ de 6 N y $\vec{F}_2$ de 8 N, perpendiculares entre sí, ¿cuál es la dirección y el módulo de la resultante?.

Ya que las dos fuerzas son perpendiculares, podemos colocar un par de ejes **x** e **y** cuya orientación coincida con la de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ respectivamente:

y será

$\vec{F}_1 = 6\ \text{N}\ \mathbf{i}$

$\vec{F}_2 = 8\ \text{N}\ \mathbf{j}$

La resultante $\vec{R}$ debe ser:

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 6\ \text{N}\ \mathbf{i} + 8\ \text{N}\ \mathbf{j}$

es decir, $R_x = 6\ \text{N}$; $R_y = 8\ \text{N}$

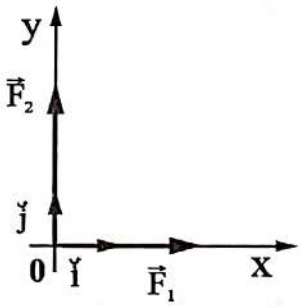


Fig. 1.2: Representación de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

Para averiguar la dirección de la resultante:

$$\text{tg}\theta = \frac{R_y}{R_x} \quad \therefore \quad \theta = \text{arctg}\frac{R_y}{R_x} = \text{arctg}\frac{8}{6} = 53{,}13°$$

y el módulo:

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{36\text{N}^2 + 64\text{N}^2} = \sqrt{100\text{N}^2}$$

$$\boxed{|\vec{R}| = 10\ \text{N}}$$

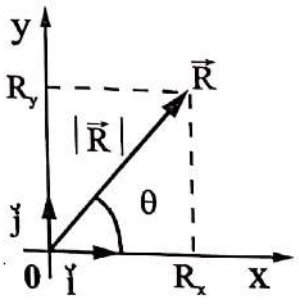


Fig. 1.3: Resultante.

Respuesta: La resultante es una fuerza de 10 N cuya dirección forma un ángulo de 53,13° con la de $\vec{F}_1$.

** En el apéndice de matemática se da el ejemplo del sacacorchos que muestra que la resultante se obtiene mediante la suma vectorial sólo en el caso de partículas, y no en todos los casos si se trata de cuerpos extensos.*

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 1.3:

Si ahora actúan tres fuerzas sobre una partícula de módulos $|\vec{F}_1| = 15$ N; $|\vec{F}_2| = 9$ N; $|\vec{F}_3| = 10$ N; que forman con el sistema de coordenadas de la figura los ángulos que allí se indican entonces es:

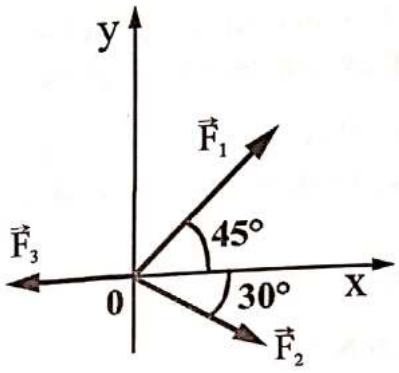


Fig. 1.4: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$.

$$\vec{F}_1 = 15\text{ N}\cos 45°\,\mathbf{i} + 15\text{ N}\,\text{sen}\,45°\,\mathbf{j}$$

$$\vec{F}_2 = 9\text{ N}\cos 30°\,\mathbf{i} - 9\text{ N}\,\text{sen}\,30°\,\mathbf{j}$$

$$\vec{F}_3 = -10\text{ N}\,\mathbf{i}$$

La resultante $\vec{R}$ será:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{R} = (15\text{ N}\cos 45° + 9\text{ N}\cos 30° - 10\text{ N})\,\mathbf{i} + (15\text{ N}\,\text{sen}\,45° - 9\text{ N}\,\text{sen}\,30°)\,\mathbf{j}$$

$$\vec{R} = R_x\,\mathbf{i} + R_y\,\mathbf{j}$$

$$R_x = 15\text{ N}\cos 45° + 9\text{ N}\cos 30° - 10\text{ N} = 8{,}4\text{ N}$$

$$R_y = 15\text{ N}\,\text{sen}\,45° - 9\text{ N}\,\text{sen}\,30° = 6{,}1\text{ N}$$

La dirección de la resultante está dada por:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{R_y}{R_x} \quad \therefore \quad \theta = \text{arctg}\,\frac{R_y}{R_x} = \text{arctg}\,\frac{6{,}1}{8{,}4} = 53°59'$$

y el módulo

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 10{,}38\text{ N}$$

Respuesta: La resultante es una fuerza de 10,38 N cuya dirección forma un ángulo de 35° 59' con la dirección del eje x.

Escaneado con CamScanner

1.3 PRINCIPIOS DE NEWTON

1.3.1 ALGUNAS REFLEXIONES PREVIAS

A través del estudio de la cinemática hemos dejado establecido que para describir un suceso es necesario establecer un marco de referencia de **espacio** y **tiempo** que, aunque arbitrario, debe quedar claramente identificado. En el marco espacio-temporal de referencia, la descripción de los fenómenos se realiza mediante variables que llamamos **magnitudes físicas**. Estas **describen** propiedades de objetos concretos o ideales que llamamos **sistemas físicos** (porción del universo que se estudia).

El sistema físico más simple que podemos concebir es una **partícula**, aislada del resto del universo. En este caso, las magnitudes físicas adecuadas para describir su movimiento son su posición y su velocidad.

Para este sistema aislado siempre es posible encontrar un sistema de referencia en el que su movimiento sea rectilíneo y uniforme*. Este sistema de referencia se llama **inercial**.

Este movimiento sólo puede ser modificado a través de una acción externa al sistema considerado, provocada por otro sistema físico que interactúe con él.

Como resultado de la interacción, el comportamiento de ambos sistemas varía, y los cuerpos, al cambiar su velocidad, se aceleran. Hay que notar que la interacción es un proceso mutuo: siempre que un sistema actúa sobre otro, éste también actúa sobre el primero. A veces esto se menciona diciendo que uno acciona sobre el otro y éste reacciona sobre el anterior. En síntesis, existen sistemas de referencia, llamados inerciales, en los que todas las fuerzas y aceleraciones que se observan se deben a interacciones entre partículas que se atraen o se rechazan. En tales sistemas de referencia, si no hay interacción, no hay fuerza.

La descripción de estos procesos de interacción (o entre sistemas físicos) puede plantearse de acuerdo a tres leyes fundamentales:

LEYES DE NEWTON

Ley I:
Toda partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, si sobre ella no actúan fuerzas; o si actúan, la suma de éstas es cero.

Ley II:
Para una partícula, la aceleración es proporcional a la resultante de las fuerzas actuantes y tiene igual dirección y sentido que ella.

Ley III:
Las fuerzas de interacción entre dos partículas (sistema) son siempre de igual módulo, de igual dirección (recta de acción) y de sentidos opuestos.

** Esta afirmación no está libre de controversias originadas en el hecho que dada **cualquier** partícula, aislada o no del resto, actúen o no fuerzas sobre ella, siempre es posible hallar un sistema de referencia en el que dicha partícula se mueva con Movimiento Rectilíneo y Uniforme.*

Escaneado con CamScanner

1.3.2 SIGNIFICADOS Y ALCANCE

Si centramos nuestra atención en estos tres enunciados, que a primera vista parecen bastante inocentes como para ser los pilares de toda una concepción científica, con sus extraordinarias implicancias en las demás ramas del conocimiento, podemos abstraer los conceptos fundamentales involucrados en ellos, que son:

- un objeto físico (el cuerpo);
- un observable (el movimiento);
- un agente (la fuerza) que es la causa de lo que se observa.

Aunque el concepto de interacción está presente en las formulaciones de Newton, al referirse éste al **cuerpo aislado**, utiliza el concepto de fuerza como la manifestación de la acción de un cuerpo sobre otro (Ley III).

Es este agente el que explica las modificaciones del movimiento, pues en su primera ley, establece que si no hay **fuerza** (o la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es nula) no hay **cambio** en la velocidad del cuerpo.

Ahora bien, así como la primera ley establece la necesidad de una causa (la fuerza) para obtener un efecto (el cambio en el vector velocidad), la segunda ley fija cuál es la forma que adopta esta relación causa-efecto, esto es, dice que la causa es **proporcional** al efecto.

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

Dado un determinado cuerpo al que se le aplican diversas fuerzas, se hallará que adquiere diversas aceleraciones y si actúan simultaneamente sobre el cuerpo dichas fuerzas, este adquiere una aceleración que resulta ser la suma de las aceleraciones individuales.

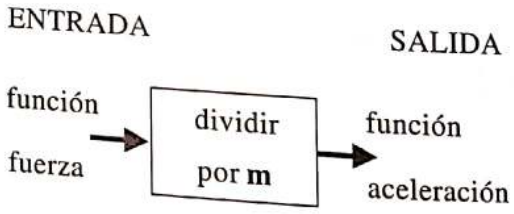
$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}$$

Hay una razón o constante de proporcionalidad entre las aceleraciones y las fuerzas. Se encuentra experimentalmente que la constante **m** sólo depende del cuerpo en cuestión y no de la naturaleza de la fuerza $\vec{F}$ o de su intensidad. Si se eligen diversos cuerpos se hallarán, en general, diversas constantes de proporcionalidad.

Esta propiedad que identifica al cuerpo se llama **masa** y Newton la asoció a la «cantidad de materia», que define como el producto de la densidad por el volumen.

Mucho se ha discutido acerca del significado de esta sintética expresión. Hay quienes pretenden que la Ley II define la fuerza en forma operacional, ya que de lo contrario aparecería como un concepto cualitativo; otros pretenden que pudiéndose medir la fuerza (mediante un dinamómetro) y la aceleración, ésta sería una definición operacional del concepto de masa. Postergando discusiones de tipo epistemológico, a nosotros nos será provechoso utilizar la ecuación de Newton como una **regla metodológica** (como regla de procedimiento). Aclaremos este significado:

Podríamos pensarla como una máquina calculadora que está programada para dividir por m la información que le suministramos y nos entrega aceleraciones



Con esta poderosa «maquinita» resolveremos un sinfín de situaciones, para distintos sistemas físicos, caracterizados por distintas funciones fuerza (bloques tirados por sogas, cuerpos cayendo por planos inclinados, cuerpos sujetos a resortes, movimiento planetario, etc.)

Con respecto a la tercera ley, la comúnmente llamada de acción y reacción, podemos decir que plantea la forma matemática de la interacción entre dos objetos físicos, entendiendo por interacción el hecho experimental de que dos objetos físicos puestos en proximidad se modifican mutuamente sus estados de movimiento.

Escaneado con CamScanner

El contenido importante de esta ley es que la **influencia es recíproca**. No existen acciones unilaterales: Si un cuerpo A le hace fuerza a otro cuerpo B, éste le hará a A también fuerza, y de la misma intensidad, dirección y distinto sentido.

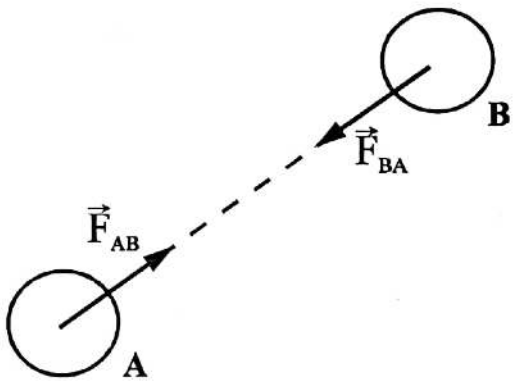


Fig. 1.5: Par de fuerzas, par de interacción.

Ahora, si consideramos uno de los cuerpos por separado (no vemos el cuerpo B) y observamos que A posee un movimiento acelerado, reemplazamos a B por la manifestación de su influencia, a la que llamamos fuerza y planteamos la Ley II

$$a_A = \frac{\vec{F}_A}{m_A}$$

Del mismo modo, podemos hacerlo con el objeto B

$$a_B = \frac{\vec{F}_B}{m_B}$$

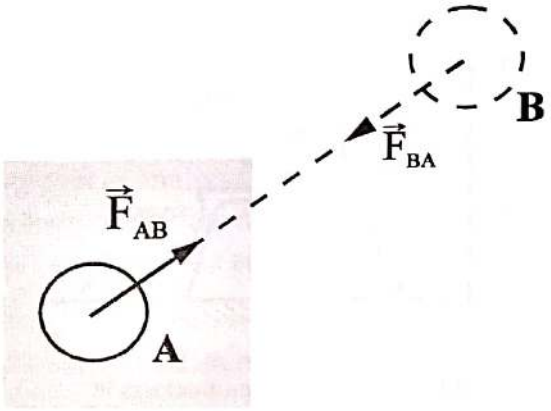


Fig. 1.6: Elección del sistema a estudiar.

La relación matemática entre estas manifestaciones de la interacción es

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0 \qquad \text{o} \qquad \vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

Debe tenerse muy en cuenta que, el hecho de que la suma de estas fuerzas sea cero, no significa que la resultante de las fuerzas aplicadas sobre cada uno de los cuerpos sea nula, pues las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ están aplicadas sobre cuerpos distintos.

Desde un punto de vista práctico, la tercera ley, que establece la existencia de estos pares de fuerzas de acción-reacción cuando hay dos o más objetos en interacción, nos permite manifestar cada par de interacción por separado y de este modo conocer **todas las acciones existentes sobre un cuerpo del conjunto** y, mediante el **principio de superposición***, encontrar la fuerza neta (la resultante) actuante y calcular la aceleración que experimentará el cuerpo aplicando la Ley II.

** Este principio no significa otra cosa que la composición o suma vectorial de fuerzas descriptas en 1.2.1.*

Escaneado con CamScanner

Veamos un ejemplo que proponemos se trabaje en clase:

Ejemplo 1.4:

Supongamos un cuerpo apoyado sobre una mesa y ésta apoyada sobre el piso (que pertenece a una casa, edificada sobre la superficie de la Tierra, ...). El conjunto no se mueve (visto desde la Tierra, que por ahora consideraremos, sin discusión, un sistema inercial*) por lo cual, según la segunda ley

$$\Sigma \vec{F} = m\,\vec{a} = 0$$

¿Cómo podríamos justificar este resultado, desde el momento en que sin duda hay múltiples interacciones?

Se lo proponemos como ejercicio:

- Encuentre todos los pares de interacción (acción-reacción) entre los distintos cuerpos;
- Dibuje aparte el cuerpo que está sobre la mesa y señale sobre él todas las **acciones** (fuerzas) con que los demás cuerpos se manifiestan;
- Encuentre la sumatoria de todas esas fuerzas.

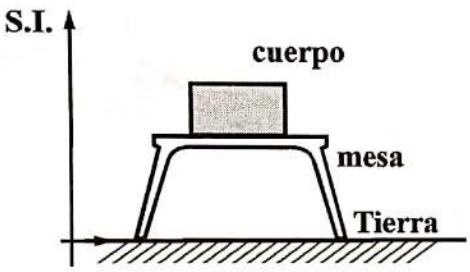


Fig. 1.7: Cuerpos en interacción

**En realidad no lo es debido a su movimiento de rotación. Se hace esta aproximación debido a que en los problemas habituales no introduce errores apreciables.*

1.4 EJEMPLOS DE APLICACION

Veamos ahora cómo operan las leyes de Newton en la descripción del movimiento de cuerpos sometidos a diversas acciones dinámicas:

1.4.1 DINAMICA EN LOS MOVIMIENTOS RECTILINEOS

Ejemplo 1.5:

Consideremos el caso sencillo en que tiramos de un bloque mediante una soga, apoyado sobre una mesa perfectamente horizontal y en el caso ideal en que no hay rozamiento entre las superficies en contacto.

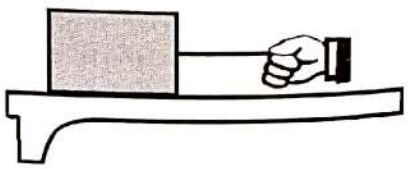


Fig. 1.8: Bloque tirado por medio de una soga.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 1.5:

Supongamos también que la soga tiene una masa despreciable frente a la masa del bloque, en cuyo caso podremos considerarla simplemente como un medio para ejercer una acción sobre el cuerpo.

Comenzaremos a utilizar las leyes de la dinámica haciendo algunas consideraciones:

1- Elegir un sistema de referencia desde el cual la descripción sea válida, esto es, aquel en que se cumplan las leyes. En nuestro análisis teórico simplemente postulamos la existencia de un **sistema inercial** y diremos que nuestras conclusiones serán válidas en él.

2- Idealizar el cuerpo de tal forma que podamos considerarlo una partícula. Para ello elegimos un punto del mismo en el que suponemos concentrada su masa, y en el que consideramos aplicadas las fuerzas.

3- Dibujar a cada cuerpo aisladamente para poder visualizar mejor las fuerzas que actúan sobre él (Diagrama de cuerpo libre o aislado).

El cuerpo aislado es una abstracción, deberemos entonces analizar todas las interacciones entre pares de cuerpos y discriminar cuáles son las acciones de los demás cuerpos sobre el que nos interesa, expresadas en términos de fuerzas, y obtener la aceleración que resulta del conjunto de dichas fuerzas.

Volvamos ahora a nuestro ejemplo y sigamos con el procedimiento enunciado:

1.- Consideremos un S.I.

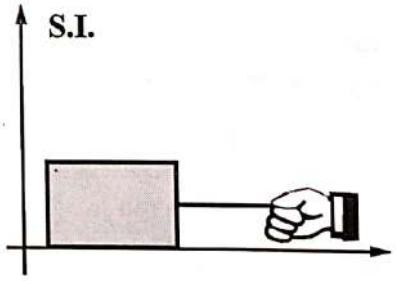


Fig. 1.9: Cuerpo de masa M en un sistema inercial.

2.- Reduzcamos el cuerpo a un punto material y analicemos las interacciones:

a) La **mano** interactúa con el cuerpo, a través de la soga, tirando de él. Esta acción se manifiesta concretamente a través de una tensión en la cuerda que va a tirar del cuerpo hacia la derecha. Llamaremos tensión $\vec{T}$ a la fuerza que la mano ejerce sobre el cuerpo.

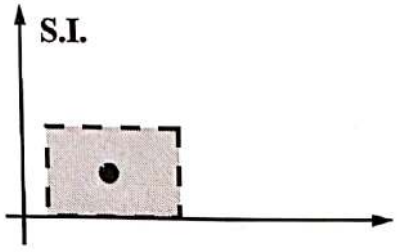


Fig. 1.10: Cuerpo puntual.

b) La **Tierra** interactúa con el cuerpo, y ejerce una fuerza hacia su centro. Esa fuerza se denomina el peso del cuerpo y la representamos con $\vec{P}$.

c) Pero la mesa también interactúa con el cuerpo e impide que caiga hacia la Tierra. El resultado de la interacción entre la mesa y el cuerpo es una fuerza perpendicular a la superficie de contacto (ya que no aporta al movimiento del cuerpo en la dirección horizontal, sino que simplemente lo sostiene). Suele llamarse reacción normal del plano de contacto, $\vec{N}$.

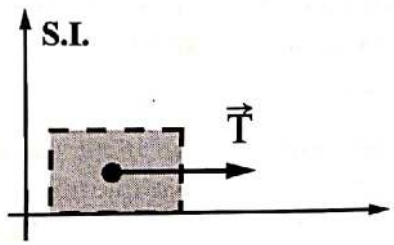


Fig. 1.11: Fuerza que ejerce la soga.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 1.5:

Y no observamos otras interacciones (tome nota de que no hemos considerado las fuerzas ejercidas de acuedo al principio de interacción sobre los otros cuerpos (la mano, la Tierra y la mesa) ya que esos cuerpos no entran ahora en nuestro análisis).

De este modo hemos **desvinculado** mentalmente al cuerpo y podemos buscar la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo que nos dirá cuál es la aceleración que adquiere.

El esquema que hemos construído suele llamarse diagrama de cuerpo aislado (o cuerpo libre).

3.- Apliquemos ahora la Ley II:

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

En vez de hallar la resultante de fuerzas, descompondremos la ecuación vectorial en dos ecuaciones escalares y calcularemos las componentes escalares de la aceleración por separado (algunas componentes pueden ser nulas y a la postre los cálculos se simplifican).

$$\Sigma F_x = m\, a_x$$

$$\Sigma F_y = m a_y$$

En nuestro caso:

$$\Sigma F_x = |\vec{T}| = m\, a_x$$

$$\Sigma F_y = |\vec{N}| - |\vec{P}| = m\, a_y$$

Pero vemos (condición del enunciado) que el cuerpo no se desplaza según y, esto es, $a_y = 0$. Luego

$$\Sigma F_y = |\vec{N}| - |\vec{P}| = m\, a_y = 0$$

de donde $|\vec{N}| = |\vec{P}|$ y

$$a = \frac{|\vec{T}|}{m}$$

La aceleración sólo depende de la tensión de la soga, que transmite al cuerpo la fuerza que la mano ejerce sobre ella, y la masa del cuerpo. Todo sucede como si no hubiera ni peso $\vec{P}$ ni fuerza normal de contacto $\vec{N}$*, y sólo actuara $\vec{T}$.

** A pesar de que se la conoce con ese nombre (reacción normal) $\vec{N}$ no forma con $\vec{P}$ un par de acción y reacción pues están aplicadas sobre el mismo cuerpo. Los pares de acción y reación están aplicados sobre cuerpos distintos.*

Apliquemos este mismo análisis, abreviado, a una serie de casos algo más complejos.

Ejemplo 1.6:

Consideremos dos cuerpos, tirados por una soga, y veamos con qué aceleración se mueve el conjunto:

Nuestra intuición nos anticipa que ambos cuerpos se acelerarán lo mismo que uno de masa igual a la suma de m_1 y m_2.

Supopndremos que la cuerda que une a los cuerpos, así como la que une la mano con ellos, es inextensible, de modo que ambos tengan la misma aceleración.

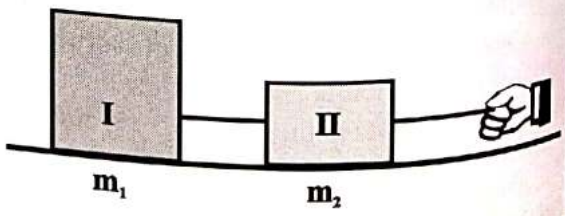


Fig. 1.14: Cuerpos de masas m_1 y m_2.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 1.6:

Desvinculemos idealmente a ambos cuerpos:

Cuerpo I (el de la izquierda, **Fig. 1.14**): la mano no ejerce acción directa sobre él, pero sí la ejerce el cuerpo de la derecha a través de la soga y, al igual que antes, tendremos el diagrama de cuerpo libre, o aislado, de la **Fig. 1.15 a**.

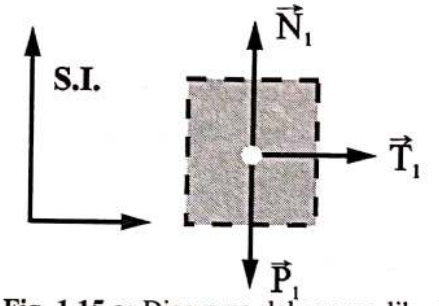


Fig. 1.15 a: Diagrama del cuerpo libre I.

Cuerpo II: Este recibirá, por una parte, la acción de la mano que tira hacia la derecha, pero estará impedido de acelerarse como lo haría si sólo estuviera la fuerza de la derecha pues ahora el cuerpo I ejercerá sobre él una fuerza en sentido contrario a la que le ejerce la mano. En el diagrama de cuerpo desvinculando se considera este nuevo elemento.

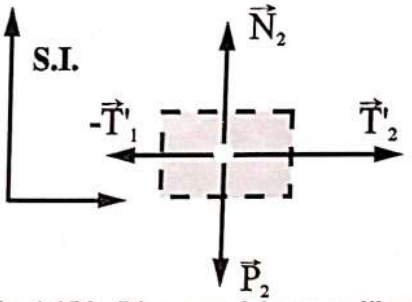


Fig. 1.15 b: Diagrama del cuerpo libre II.

Hemos llamado $\vec{T}_1$ y $-\vec{T}'_1$ a las tensiones que la cuerda ejerce sobre los cuerpos I y II, a falta de información, pero veamos si guardan alguna relación entre sí.

Si consideramos un pequeño trocito de cuerda, ella, como un cuerpo más del conjunto, estará sometida a las reacciones de los cuerpos I y II.

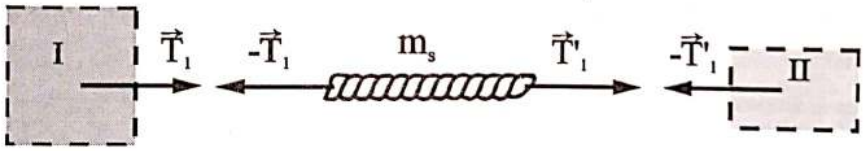


Fig. 1.16: Esquema de la interacción de la soga con los cuerpos I y II.

Luego, se cumple, para ese trozo que se mueve junto con el sistema de cuerpos

$$\Sigma F_x = m\, a_x$$

$$|\vec{T}'_1| - |\vec{T}_1| = m\, a_x$$

Pero idealizamos la soga y supusimos m = 0, por lo cual

$$|\vec{T}'_1| - |\vec{T}_1| = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{T}'_1| = |\vec{T}_1|$$

La soga de masa nula sólo **transmite fuerzas** de un cuerpo a otro, ella no es un cuerpo dentro del sistema. Si realizamos las sumas de las fuerzas para cada cuerpo, sabiendo que todos los cuerpos tienen la misma aceleración (módulo):

Cuerpo I:

$$\Sigma F_x \;\Rightarrow\; |\vec{T}_1| = m_1\, a \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y \;\Rightarrow\; |\vec{N}_1| - |\vec{P}_1| = 0 \;\Rightarrow\; |\vec{N}_1| = |\vec{P}_1|$$

Cuerpo II:

$$\Sigma F_x \Rightarrow |\vec{T}_2| - |\vec{T}_1| = m_2\, a \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y \Rightarrow |\vec{N}_2| - |\vec{P}_2| = 0 \Rightarrow |\vec{N}_2| = |\vec{P}_2|$$

Las ecuaciones (1) y (2) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas, **a** y $|\vec{T}_1|$, considerando que $|\vec{T}_2|$ es la fuerza exterior que se ejerce sobre el sistema, dato del problema.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 1.6:

En este caso, es necesario resolver el sistema de ecuaciones, puesto que ninguna de ellas por separado es resoluble.

(1) $|\vec{T}_1| = m_1 a$

(2) $|\vec{T}_2| - |\vec{T}_1| = m_2 a$

Reemplazando (1) en (2):

$$|\vec{T}_2| - m_1 a = m_2 a$$

$$a = \frac{|\vec{T}_2|}{m_1 + m_2}$$

O sea que habríamos abreviado el cálculo si en vez de desvinculalar cada cuerpo hubiésemos considerado un único bloque de masa $(m_1 + m_2)$ bajo la acción de $|\vec{T}_2|$ (ejercida por la mano) con lo cual el problema se reduce al anterior.

La ventaja de haber estudiado cada cuerpo por separado en vez de aplicar el cálculo al conjunto de ambos es que hemos puesto en evidencia a las **fuerzas de vínculo** $\vec{N}$ y $\vec{T}_1$; además podemos calcular sus módulos, en este caso $|\vec{N}|$ y $|\vec{T}_1|$ respectivamente.

Si reemplazamos el valor obtenido para a en (1):

$$|\vec{T}_1| = \frac{m_1}{m_1 + m_2} |\vec{T}_2|$$

Vemos que la fuerza que acelera al cuerpo de la izquierda tiene una intensidad igual a una fracción de la intensidad de la fuerza que hace la mano. Sin embargo esto no nos autoriza a creer que la mano hace parte de la fuerza sobre II y parte sobre I. En este tratamiento la mano hace **toda** la fuerza $\vec{T}_2$ sobre el cuerpo II; ahora bien, aparece una fuerza $\vec{T}_1$ sobre II, y una $\vec{T}'_1$ sobre el I. Si se tratara de un tren que tiene vagones enganchados y que rueda sobre rieles, esos datos serían de suma importancia, a fin de dimensionar las piezas involucradas y elegir el material adecuado para construírlas.

Le proponemos que resuelva Ud. los siguientes casos:

1 - Calcular la aceleración (dirección y módulo) del sistema y las tensiones en cada una de las cuerdas (**Fig. 1.17**).

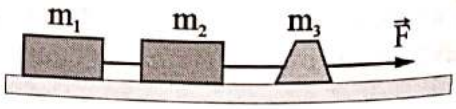


Fig. 1.17: Tres cuerpos.

2 - Calcular la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda (**Fig. 1.18**).

Una ayuda: siga la misma rutina que para los problemas anteriores; considere que el sistema de referencia es arbitrario y puede ser distinto para ambos cuerpos (tenga cuidado de plantear las ecuaciones dinámicas coherentes con los sistemas de referencia).

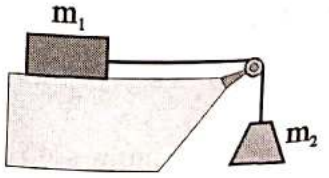


Fig. 1.18: Dos cuerpos moviéndose en distintas direcciones.

Tome en cuenta que la polea, también idealizada, no posee masa y su única función es desviar el movimiento.

Escaneado con CamScanner

Veamos ahora otro caso:

Ejemplo 1.7:

Un cuerpo se desliza por un plano inclinado sin rozamiento. Calcular su aceleración.

Hay dos interacciones: la Tierra, que le ejerce una fuerza siempre dirigida hacia su centro, y el plano de contacto, que le ejerce una fuerza normal, $\vec{N}$, que en este caso no coincide en dirección con el peso $\vec{P}$.

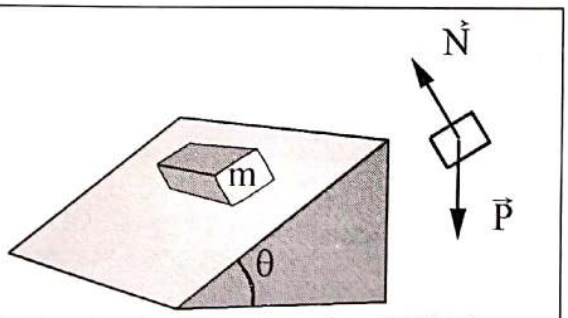


Fig. 1.19: Un cuerpo en un plano inclinado.

En este caso tenemos dos opciones válidas para elegir un sistema de referencia: el mismo que antes, en cuyo caso el cuerpo que se mueve a lo largo del plano (sin despegarse) tendrá una aceleración con componentes a_x y a_y, ambas no nulas, o bien un sistema con su eje x paralelo al plano, en cuyo caso la aceleración tendrá sólo componente a_x.

Por simplicidad elegimos este último.

En este caso, la fuerza $\vec{P}$ tendrá dos componentes no nulas P_x y P_y. Si aplicamos la segunda ley:

$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\Sigma F_x = m\,a_x \quad y \quad \Sigma F_y = m\,a_y$$

$$\Sigma F_x \Rightarrow |\vec{P}|\,\text{sen}\,\theta = m\,a \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y \Rightarrow |\vec{N}| - |\vec{P}|\,\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

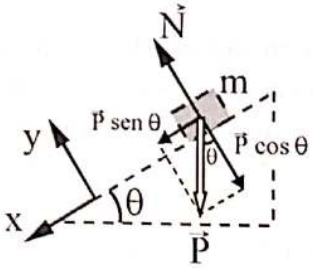


Fig. 1.20: Diagrama del cuerpo libre.

De (1) obtenemos

$$a = \frac{m\,|\vec{g}|}{m}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{a = |\vec{g}|\,\text{sen}\,\theta}$$

¡La aceleración de un cuerpo que desliza sobre un plano inclinado no depende de la masa! (Es como una caída libre más lenta; Galileo trabajó con el plano inclinado para disminuir la aceleración y poder medir los tiempos de caída).

Como casos extremos,

para $\theta = 0 \Rightarrow a = |\vec{g}|\,\text{sen}\,0° = 0$ (reposo o $\vec{v}$ = cte., plano horizontal)

para $\theta = 90°$ $a = |\vec{g}|\,\text{sen}\,90° = |\vec{g}|$ (caída libre, no hay plano)

De (2) obtenemos $|\vec{N}| = |\vec{P}|\cos\theta$

¡Atención! La fuerza perpendicular que ejerce el plano depende de la acción que sobre él se ejerce; $|\vec{N}|$ **no es siempre igual a** $|\vec{P}|$, puesto que es la respuesta del plano a la totalidad de fuerzas normales que se ejercen sobre el cuerpo.

Escaneado con CamScanner

Le proponemos que resuelva el siguiente caso:

Calcule la aceleración del sistema formado por los cuerpos de masas m_1 y m_2, así como la tensión de la cuerda que los une.

$m_1 = 10$ kg

$m_2 = 30$ kg

$\theta = 30°$

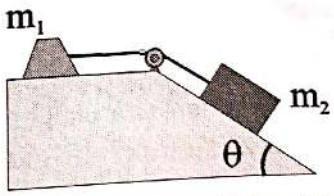


Fig. 1.21: Un cuerpo en el plano horizontal y el otro en un plano inclinado.

1.4.2 DINAMICA EN LOS MOVIMIENTOS CURVILINEOS

En la Unidad 1, Capítulo 6 se describió el movimiento circular uniforme (M.C.U.), en el cual la dirección del vector aceleración no coincide con la del vector velocidad. Y en Capítulo 7 se expresaron las componentes intrínsecas de la aceleración, que como vimos tiene, respectivamente, una componente tangencial al desplazamiento ($\vec{a}_T$), relacionada con la variación del módulo del vector velocidad tangencial, y una componente normal ($\vec{a}_N$) en la que se expresa el cambio de la dirección del movimiento del cuerpo.

La componente de la aceleración, normal al desplazamiento en estos movimientos no rectilíneos se la denomina aceleración centrípeta como ya hemos visto ($\vec{a}_c$). En el M.C.U., la $\vec{a}_c$ es la única componente de la aceleración existente y está siempre dirigida hacia el centro de la trayectoria, en razón de que el módulo del vector velocidad tangencial se mantiene constante.

De acuerdo a la segunda ley de Newton, la presencia de una aceleración -centrípeta en este caso- debe ser consecuencia de la acción de una fuerza. Esta se conoce como fuerza centrípeta ($\vec{F}_c$) de forma tal que

$$\vec{F}_c = m\,\vec{a}_c$$

Estamos ahora en condiciones de repetir argumentos ya expuestos en cinemática de manera intuitivamente más comprensible y de acuerdo a los principios fundamentales de la dinámica: si la fuerza que actúa sobre un móvil es normal a su vector velocidad tangencial en todocial permanece constante.

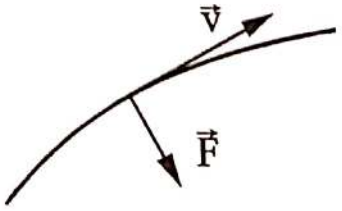


Fig. 1.22: $\vec{F}$ y $\vec{v}$

El efecto de $\vec{F}_c$ es entonces modificar la dirección de movimiento del cuerpo, o sea $\vec{v}$, pero no el módulo de $\vec{v}$; la $\vec{F}_c$ es por lo tanto una fuerza deflectora. Si el módulo de la fuerza centrípeta no cambia, también permanece constante el módulo de la aceleración centrípeta, lo que indica que la dirección del vector velocidad tangencial sufra cambios iguales en intervalos de tiempo iguales, con lo que resulta una trayectoria circular.

Escaneado con CamScanner

Otra forma de ver la existencia de la fuerza centrípeta es la siguiente: Supongamos tener una piedra atada al extremo de un hilo que hacemos girar sobre un plano horizontal (**Fig. 1.23**). Si al pasar por el punto A de la trayectoria circular se corta el hilo, ¿cuál es el movimiento posterior de la piedra?

La experiencia indica que no sigue describiendo una circunferencia ni es disparada radialmente, sino que continúa con el movmiento que tenía en el momento de romperse el vínculo, o sea con $\vec{v}_A$. ¿Qué es lo que diferencia la situación previa al momento en que el cuerpo llega a A, cuando éste describía un movimiento circular, y la posterior, en la que se desplaza rectilíneamente? Sólo la existencia de un vínculo (hilo) a través del cual actuaba sobre la piedra una fuerza (tensión del hilo) normal a la trayectoria y dirigida hacia su centro, cuyo efecto era modificar punto a punto la dirección del vector velocidad de forma tal que el movimiento resultaba una circunferencia. Esta es la fuerza centrípeta. Al romperse el hilo, o sea al desaparecer el vínculo y por lo tanto la fuerza centrípeta, el móvil conserva su vector velocidad -como lo afirma la primera ley de Newton- desplazándose sobre un camino rectilíneo a velocidad constante (en nuestro caso $\vec{v}_A$).

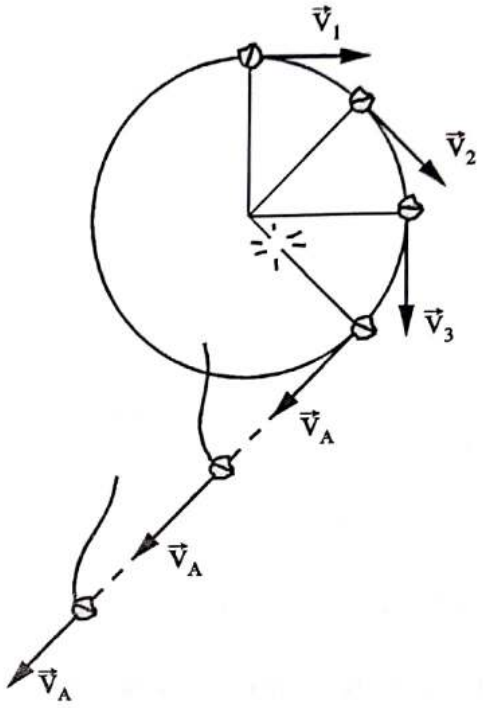


Fig. 1.23: Piedra girando en un plano horizontal.

En la caracterización anterior no se tuvo en cuenta el efecto de otras fuerzas: peso, rozamiento, etc., ya que lo que se quería era analizar solamente la existencia de de $\vec{F}_c$.

En resumen, siempre que un cuerpo describe una trayectoria no recta, esto se debe a la acción de una fuerza que tiene componente normal al desplazamiento. Esta componente es llamada fuerza centrípeta (**Fig. 1.24**).

En el caso de un movimiento circular uniforme, la $\vec{F}_c$ es la única fuerza existente y su valor es constante. ¿Qué ejemplos de este tipo de movimiento tenemos en la vida diaria? y ¿cómo se ejerce en ellos la fuerza centrípeta?.

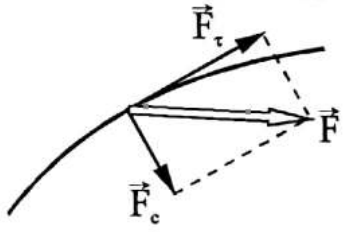


Fig. 1.24: Fuerza centrípeta.

Veamos los siguientes ejemplos:

a) La piedra girando atada al extremo de un hilo que ya mencionamos. La tensión del hilo no es otra cosa que la $\vec{F}_c$.

Escaneado con CamScanner

b) El tambor de un lavarropas; en el proceso conocido como centrifugado, (ver **Fig. 1.25**) las paredes del tambor constituyen un vínculo para la ropa pero no para el agua, por lo tanto ejercen una fuerza sobre la primera que la hace mover en círculos, mientras que la segunda escapa por los agujeros y se aleja tangencialmente, siendo recogida por el recipiente que envuelve al tambor.

El mismo efecto se conseguiría si se coloca la ropa en una criba o colador, y se acelera todo en línea recta. Pero habría que ir muy lejos a recuperar la ropa escurrida.

El tambor, actuando como vínculo, ejerce la $\vec{F}_c$ que obliga a la ropa a describir un movimiento circular.

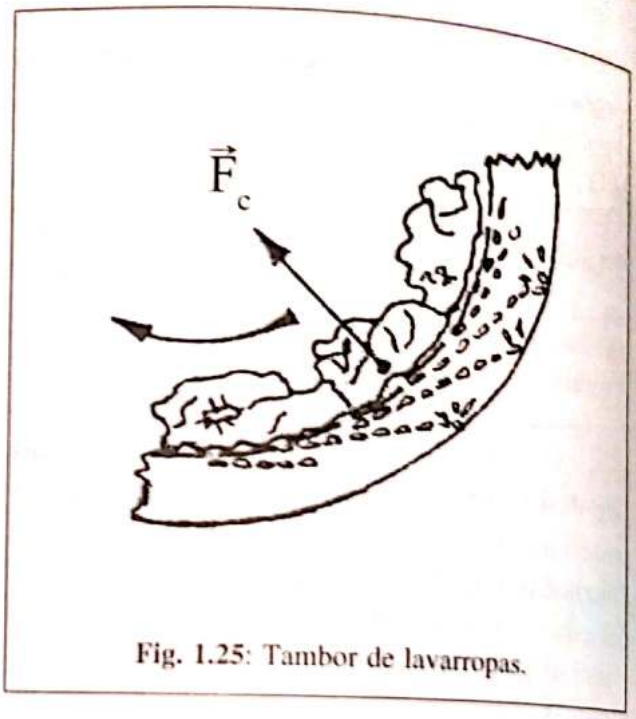


Fig. 1.25: Tambor de lavarropas.

c) La Luna o un satélite artificial que orbita la Tierra, o esta última en un giro alrededor del Sol. La F_c no es otra que la atracción gravitatoria, actuando entre la Luna o el satélite artificial y la Tierra, o entre la Tierra y el Sol.

En todos estos casos, y de acuerdo a lo visto en cinemática,

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{por lo cual} \quad F_c = m\, a_c = m \frac{v^2}{r} = m\, \omega^2\, r$$

donde las magnitudes vectoriales están expresadas en módulo.

Habrá notado usted que no nos hemos referido en ningún momento a fuerzas centrífugas (sólo hemos mencionado a la centrípeta). Quizá ello cause extrañeza, puesto que en el lenguaje ordinario ocurre lo contrario: no se habla de centripeteadoras. Pues la verdad es que aunque esto contradiga nuestra intuición, la fuerza centrífuga no existe, porque no hay aceleraciones centrífugas, y $\vec{F} = m\vec{a}$. En contextos muy especiales, sin embargo, sí se habla en física de la fuerza centrífuga, pero se trata de casos más complejos de movimientos que se estudian desde sistemas de referencia no inerciales (Ver Capítulo 3).

Escaneado con CamScanner

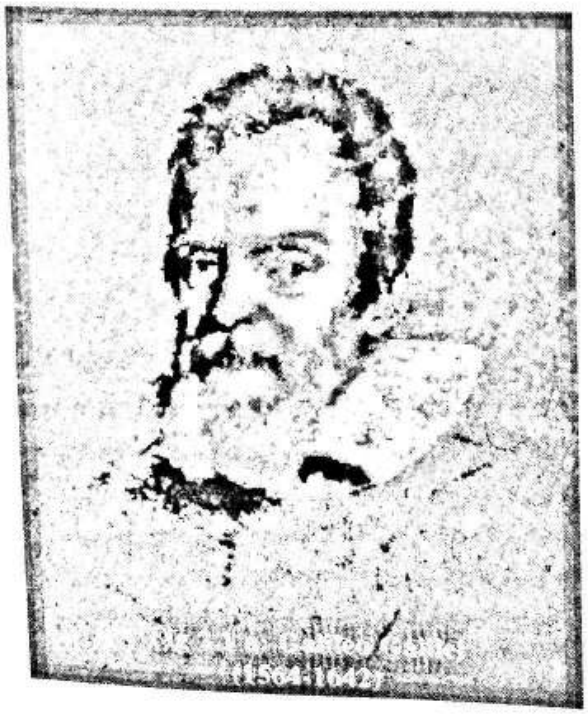
2.1 FUERZAS DE ROZAMIENTO

En los casos estudiados hasta ahora hemos despreciado el rozamiento, ya sea porque interviene en pequeño grado o porque lo excluímos a fines de estudiar un problema con el máximo grado de simplicidad.

Hay muchas clases de rozamiento: entre sólidos, entre sólido y líquido, ente sólido y gas, entre líquidos, por deslizamiento entre superficies de sólidos, por rodadura sin deslizamiento de un sólido sobre otro, etc. Los casos más sencillos de tratar son los de rozamiento por deslizamiento entre superficies sólidas y los de rodadura entre el mismo tipo de superficies. Por ejemplo, se sabe que arrastrar un bloque sobre el piso demanda mayor esfuerzo que si se apoya el bloque sobre una tabla, debajo de la cual se ponen trozos de caño. El rozamiento por rodadura es menor, a iguales materiales, que el de deslizamiento.

Cuando se diseñan engranajes, se trata de que sus dientes rueden sin deslizar unos sobre otros, lo que constituye un atractivo problema de geometría, no sólo para lograr que los movimientos se transmitan con menores pérdidas por rozamiento, sino también para aumentar la vida útil de las piezas.

El movimiento de los astros es prácticamente libre de rozamientos, y por esta razón su estudio contribuyó grandemente al descubrimiento de las leyes dinámicas. En cambio, en nuestro mundo terrestre atmosférico, el rozamiento resulta inevitable o difícil de eliminar, y así la humanidad hasta el siglo XVI creyó que para mantener un movimiento era necesario la permanente aplicación de fuerzas, cuando en realidad para alguno de ellos, como los M.R.U., lo que es necesario hacer es eliminar toda fuerza, también el rozamiento; o compensarlas.



A pesar del poderoso interés tecnológico en reducir el rozamiento para los fines prácticos de evitar desgastes y economizar combustibles, no es sencilla su eliminación, sobre todo en lo que respecta a movimientos de traslación. Galileo cuenta que redujo considerablemente el rozamiento en sus planos inclinados puliendo cuidadosamente el canal de madera y tapizándolo con pergamino.

Actualmente se logra en la industria y el laboratorio la eliminación casi completa del rozamiento por deslizamiento mediante el recurso de mantener separadas las superficies con un colchón de aire comprimido.

Fig. 2.1: Dispositivo llamado colchón de aire.

Estas mesas y rieles de aire tienen gran utilidad en laboratorios de enseñanza. El deslizamiento suave e indefinido de los bloques en los rieles es muy curioso y atractivo. Esta es una de las dificultades de la enseñanza de la dinámica: nos maravillamos cuando se manifiestan sus leyes, y en cambio nos parece absolutamente natural que el automóvil se detenga cuando se queda sin nafta, en vez de permanecer en movimiento rectilíneo y uniforme.

2.1.1 MESA DE AIRE IMPROVISADA

Pídale a un vendedor ambulante de helados un trozo de hielo seco (CO_2 sólido), y apóyelo sobre una mesa lisa. El anhídrido carbónico se volatilizará y formará un colchón gaseoso, por lo que se deslizará hacia los puntos de menor nivel. Si sobre dos trozos de hielo se colocan sendos imanes, se producen vistosos movimientos semejantes a los astronómicos. Este efecto perdura hasta que se gasten los trozos de hielo seco o hasta que la mesa se enfríe mucho y ya no volatilice suficiente cantidad de sustancia.

Consideremos un cuerpo en reposo, apoyado sobre una superficie horizontal. Su peso $m\vec{g}$ se equilibra por la fuerza $\vec{N}$ que le ejerce el plano (**Fig. 2.2 a**). Si le aplicamos una pequeña fuerza $\vec{F}$ en la dirección tangencial a la superficie comprobamos que el cuerpo permanece en reposo, es decir que hay una fuerza de rozamiento estática $\vec{f}_{re}$ que se opone y balancea o equilibra a $\vec{F}$ y que actúa sobre la superficie del cuerpo que está en contacto con la mesa (**Fig. 2.2 b**).
Si aumentamos la fuerza aplicada $\vec{F}$ observamos que el cuerpo continuará en reposo hasta que $\vec{F}$ tenga un valor máximo $f_{máx}$ por encima del cual el cuerpo comenzará a moverse. Se observa experimentalmente que a partir de ese valor

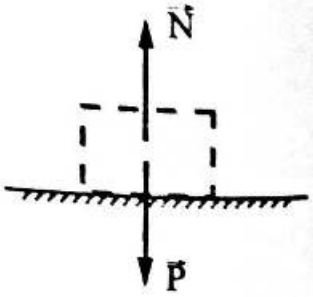


Fig. 2.2 a: $\vec{P}$ y $\vec{N}$ equilibradas.

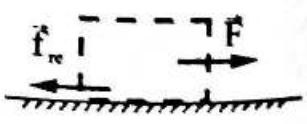


Fig. 2.2 b: $\vec{F}$ y $\vec{f}_{re}$.

$\vec{f}_{máx}$, la fuerza de rozamiento cambia bruscamente a un valor menor $\vec{f}_{rd}$, llamada fuerza de rozamiento dinámico. Podemos ilustrar lo dicho anteriormente graficando la fuerza de rozamiento $|\vec{f}_r|$ en función de la fuerza tangencial aplicada $|\vec{F}|$ (*) (ver **Fig. 2.2 e**). En resumen, las fuerzas de rozamiento estático son aquellas que actúan sobre superficies en reposo entre sí, y tienen como valor máximo el igual a la fuerza exterior aplicada para iniciar el movimiento. En cambio las fuerzas de rozamiento dinámico actúan cuando hay movimiento relativo entre dos superficies.

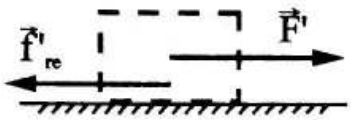


Fig. 2.2 c: $\vec{F}'$ y $\vec{f}'_{re}$.

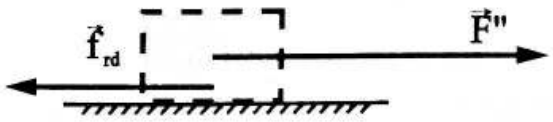


Fig. 2.2 d: $\vec{F}$ y $\vec{f}_{rd}$.

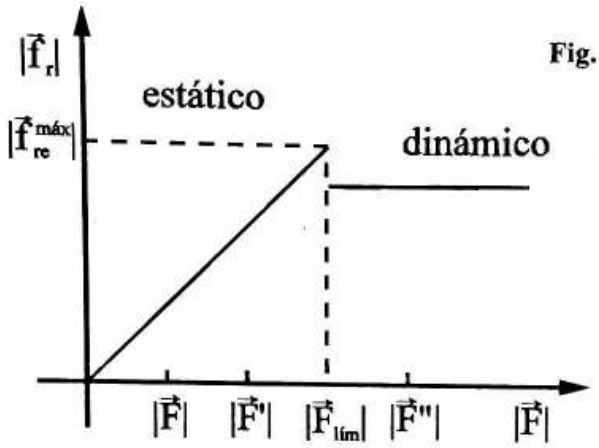


Fig. 2.2 e: Gráfico $|\vec{f}_r| = |\vec{f}_r|$ $(|\vec{F}|)$.

Se comprueba experimentalmente que la fuerza de rozamiento estático máxima entre superficies secas y no lubricadas es aproximadamente independiente del área de contacto y es proporcional a la fuerza normal.

$$|\vec{f}_{re}^{máx}| = \mu_e |\vec{N}|$$

donde la constante de proporcionalidad μ_e es el coeficiente de rozamiento estático, que depende de la naturaleza de los materiales en contacto, del pulido de las superficies, de las películas superficiales, de la temperatura y del grado de contaminación, entre otros parámetros. La fuerza de rozamiento dinámica depende también del tipo y estado de las superficies en contacto, y de la fuerza con que se aprietan entre sí, pero no depende de las fuerzas tangenciales aplicadas y además es aproximadamente independiente de la velocidad relativa de las superficies.

El módulo de la fuerza de rozamiento dinámico es:

$$|\vec{f}_{rd}| = \mu_d |\vec{N}|$$

donde μ_d es el coeficiente de rozamiento dinámico.

---

* *En el gráfico de la* ***Fig. 2.2e*** *se observa que la fuerza de rozamiento dinámico es totalmente independiente de la fuerza aplicada, incluso en el caso de que esta valga cero.*

Los coeficientes μ_e y μ_d son constantes adimensionales (o sea números sin unidades) que relacionan los **módulos** de dos fuerzas.

Generalmente $\mu_e > \mu_d$, esto significa que la fuerza de rozamiento estático es en muchos casos mayor, poco mayor, que la de rozamiento dinámico. Se lo puede comprobar sujetando una banda elástica a un objeto y remolcándolo sobre una mesa. Avanzará a tirones, aun cuando la mano se desplace uniformemente. Cada vez que el cuerpo se detiene, para reiniciar el movimiento es necesario más fuerza que la aplicada hasta entonces. La diferencia entre el rozamiento dinámico y el estático es lo suficientemente importante como para que se recomiende a los conductores de vehículos no clavar los frenos (*).

Debemos aclarar que la expresión $|\vec{f}_{rd}| = \mu_d |\vec{N}|$ constituye una aproximación, y no muy buena. Las aplicaciones profesionales más sencillas requieren tratamientos más complejos y rigurosos.

Describiremos ahora algunos ejemplos de aplicaciones de fuerzas de rozamiento.

Ejemplo 2.13

Un cuerpo de masa M en reposo, está apoyado sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ respecto de la horizontal. Si se aumenta el ángulo de inclinación se encuentra que para un cierto valor θ_e el cuerpo comienza a deslizarse sobre el plano. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático μ_e entre el cuerpo y el plano?

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son su peso $M\vec{g}$, la fuerza del plano sobre el cuerpo $\vec{N}$ y la fuerza de rozamiento estática ejercida por la superficie sobre el cuerpo. Todas las fuerzas están indicadas en la **Fig. 2.3**. Por claridad las representamos con sus puntos de aplicación separados, pero en este tratamiento el cuerpo se considerará como una partícula, y las tres fuerzas aplicadas en el mismo punto.

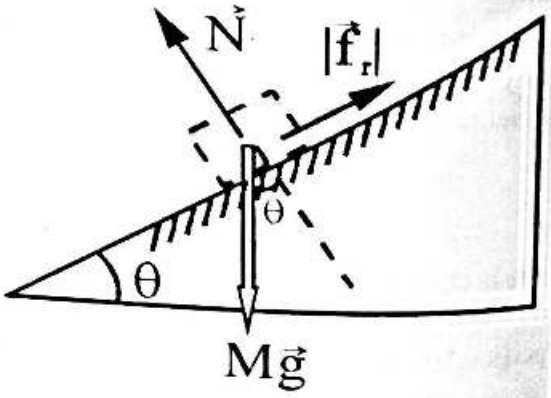


Fig. 2.3: Cuerpo apoyado en un plano inclinado.

---

* *La fuerza de rozamiento de la rueda con el piso es mayor cuando no desliza. La frenada más efectiva es silenciosa aunque menos espectacular. En las curvas vale lo mismo y ciertos conductores avezados, aunque imprudentes, suelen aumentar la velocidad hasta que pequeños ruidos intermitentes y agudos le indican que no deben excederse, si desean mantener aplicada sobre el vehículo la fuerza centrípeta que requiere su movimiento.*

Hay tipos de superficies en las que el rozamiento estático es menor que el dinámico (por ejemplo polietileno y madera). Curiosos efectos se observan en ciertas gomas siliconadas con las que se construyen juguetes en forma de pulpos o arañas. Estos deslizan de manera tan irregular como repulsiva cuando despegan una por una sus extremidades en el instante en que la velocidad relativa entre la goma y el plano se reduce lo suficiente.

Ejemplo 2.1:

Si consideramos las componentes en las direcciones perpendicular y tangencial al plano inclinado, tenemos

$$|\vec{N}| - M\,|\vec{g}|\cos\theta = 0$$

$$|\vec{f}_{re}| - M\,|\vec{g}|\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Además sabemos que $|\vec{f}_{re}| \leq \mu_e\,|\vec{N}|$, y que cuando aumentamos lentamente θ, justo en el momento en que el cuerpo comienza a deslizar el ángulo de inclinación tiene el valor θ_e, entonces $|\vec{f}_{re}^{\,máx}| = \mu_e\,|\vec{N}|$, reemplazando en las expresiones anteriores obtenemos

$$\mu_e = \text{tg}\,\theta_e$$

Hemos mostrado por lo tanto un método experimental para determinar el coeficiente de rozamiento estático mediante la medición del ángulo de inclinación para el cual un cuerpo empieza a deslizar sobre una superficie.

De forma análoga se puede comprobar que el ángulo de inclinación θ_d necesario para que un cuerpo deslice sobre un plano con velocidad constante es

$$\mu_d = \text{tg}\,\theta_d$$

donde μ_d es el coeficiente de rozamiento dinámico.

Hasta aquí hemos reemplazado en las sumatorias a las componentes escalares de las fuerzas por + ó - los módulos de las mismas de acuerdo al sistema de referencia elegido . De ahora en adelante para simplificar la notación no usaremas las barras de módulos pero antepondremos el signo que corresponda, ejemplo:

$$\text{antes} \quad |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2| = (m_1 + m_2)\,a$$

$$\text{ahora} \quad F_1 - F_2 = (m_1 + m_2)\,a$$

Ejemplo 2.2:

Analicemos el siguiente problema. Una persona arrastra por el suelo una canasta cuya masa es de 150 Kg, tirando de ella con una cuerda que está inclinada 30° con la horizontal. ¿Cuál debe ser la fuerza necesaria en la cuerda para empezar a mover la canasta si el coeficiente de rozamiento estático es de 0,50?

Las fuerzas aplicadas sobre la canasta están indicadas en la **Fig. 2.4**. Si escribimos a las fuerzas en términos de las componentes x e y tenemos.

Según x: $F\cos\theta - f_{re} = 0$

Según y: $N + F\,\text{sen}\,\theta - M\,|\vec{g}| = 0$

Además la fuerza de rozamiento estático máximo es:

$$f_{re}^{máx} = \mu_e\,N$$

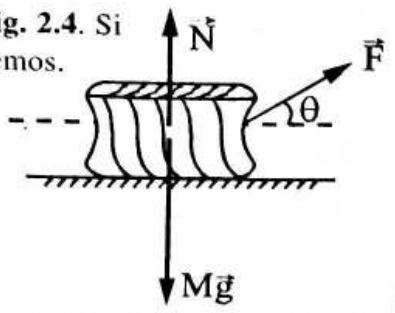


Fig. 2.4: Esquema de las fuerzas aplicadas a la Canasta.

Ejemplo 2.2:

Por lo tanto como

$$N = M\,|\vec{g}| - F \operatorname{sen}\theta$$

y $f_{re} = \mu_e (M\,|\vec{g}| - F \operatorname{sen}\theta)$; entonces

$$F\cos\theta - \mu_e (M\,|\vec{g}| - F \operatorname{sen}\theta) = 0$$

de donde resulta, despejando F, que

$$F = \frac{\mu_e M\,|\vec{g}|}{\cos\theta + \mu_e \operatorname{sen}\theta}$$

Numéricamente

$$F = \frac{0{,}5 \,.\, 150\ \text{kg} \,.\, 9{,}8\ \text{m/s}^2}{\cos 30° + 0{,}5\ \operatorname{sen} 30°} = 658{,}6\ \text{N}$$

Cuando la canasta comienza a moverse el coeficiente de rozamiento toma el valor $\mu_d = 0{,}35$. Si la fuerza $\vec{F}$ es aplicada continuamente, teniendo el valor calculado previamente, ¿cuál será la fuerza de rozamiento dinámico?

$$f_{rd} = \mu_d N = \mu_d (M\,|\vec{g}| - F \operatorname{sen}\theta)$$

$$f_{rd} = 0{,}35\,(150\ \text{kg} \,.\, 9{,}8\ \text{m/s}^2 - 658\ \text{N} \operatorname{sen} 30°)$$

$$\boxed{f_{rd} = 399{,}2\ \text{N}}$$

¿Cuál será en este caso la aceleración de la canasta?

Si planteamos según el eje y las ecuaciones escalares de la ley $\vec{F} = m\,\vec{a}$, obtenemos:

$$N + F \operatorname{sen}\theta - M\,|\vec{g}| = 0$$

Pero según x tenemos

$$F\cos\theta - f_{rd} = m\,a$$

Reemplazando adecuadamente resulta que:

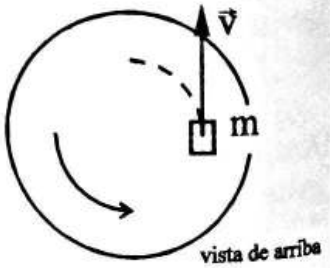
$$a = \frac{F\cos\theta - \mu_d (M\,|\vec{g}| - F \operatorname{sen}\theta)}{m}$$

$$a = \frac{658{,}6\ \text{N}\ \cos 30° - 399{,}2\ \text{N}}{150\ \text{kg}}$$

$$\boxed{a = 1{,}15\ \text{m/s}^2}$$

Ejemplo 2.3:

Se tiene una plataforma circular que gira horizontalmente y sobre ella, a 5 m de su centro, se encuentra un bloque de m = 10 kg. Entre la plataforma y el bloque el coeficiente de rozamiento estático vale $\mu_e = 0{,}5$. ¿Cuál es la velocidad máxima de rotación sin que el bloque deslice?



A medida que la plataforma gira, el bloque permanecería quieto, o se alejaría tangencialmente si ya tenía velocidad apropiada, si no se hicieran fuerzas sobre él.

No lo hace porque una fuerza centrípeta lo obliga a describir una circunferencia. En este caso dicha fuerza es la fuerza de rozamiento:

$\mu_e\, m\,|\vec{g}| = m\dfrac{v^2}{r}$ la fuerza máxima de rozamiento será:

$f_{re}^{máx} = \mu_e\, m\,|\vec{g}|$, de donde

$$v = \sqrt{\mu_e |\vec{g}| r} = \sqrt{0.5\ 10\ \text{m/s}^2\ 5\ \text{m}}$$

$$\boxed{v = 5\ \text{m/s}} \quad \text{y} \quad \boxed{\omega = v/r = 1\ \text{s}^{-1}}$$

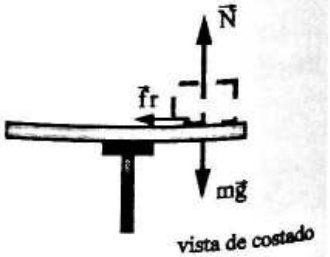


Fig. 2.5: Bloque sobre una plataforma circular.

2.1.2 VISCOSIDAD

Con el sólo objeto de hacer referencia a otro tipo de fuerzas de rozamiento, veremos en esta sección el llamado rozamiento interno o viscosidad. Este fenómeno se produce por las fuerzas de rozamiento que actuan entre dos capas paralelas de un fluído (gas o líquido) que se desplazan con distintas velocidades. El rozamiento interno se origina en la interacción entre átomos o moleculas de ambas capas. Se puede comprobar que esta fuerza es proporcional a la velocidad media de los átomos o moléculas.

Análogamente en el caso de un cuerpo que se mueve en el interior de un fluído, también aparecen fuerzas, producto de la interacción de la superficie del cuerpo con las moléculas del fluído que en determinados casos (velocidades pequeñas) son también proporcionales a la velocidad del cuerpo respecto al fluído

$$\vec{F} = - k \vec{v}$$

donde k es una constante que depende de la naturaleza del fluído y de la forma del cuerpo. En otras condiciones, esta fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad de desplazamiento.

Naturalmente, estas fuerzas se oponen a la velocidad y van creciendo a medida que crece ésta. Por ejemplo, un cuerpo en caída libre, inicialmente quieto, se desplaza por acción de la gravedad. A medida que su velocidad aumenta va también aumentando la resistencia que le ofrece el fluído en el cual se mueve (el aire). Y llega un momento (si la altura inicial es suficiente) en que esta resistencia iguala a la fuerza peso: a partir de ese momento el cuerpo continúa su caída con una velocidad constante que se conoce como "velocidad límite" *.

Aclaremos además que cuando decimos "llega un momento en que la velocidad es constante", en terminos exactos ese momento no llega jamás. Si ocurre una aproximación indefinida en la que la velocidad (creciente en este ejemplo) tiende a una constante cuando el tiempo tiende a infinito.

2.2 FUERZAS ELASTICAS

Estudiaremos las propiedades de una interacción que es función de la separación entre los cuerpos que interactúan, como es el caso de la fuerza que un resorte estirado o comprimido, interpuesto entre dos cuerpos, ejerce sobre ellos.

La fuerza ejercida por un resorte es proporcional al estiramiento o compresión del mismo respecto de la posición de deformación nula x_0 (**Fig. 2.6 a**).

$$F_x = - k (x - x_0) \qquad (1)$$

en donde $x - x_0$ puede ser negativo (resorte comprimido, **Fig. 2.6 b**) o $x - x_0$ puede ser positivo (resorte estirado, **Fig 2.6 c**): las fuerzas en ambos casos son repulsiva y atractiva, respectivamente.

Todos los resortes que cumplen con la condición lineal dada por la expresión (1) son cuerpos elásticos (**Fig. 2.6**) que satisfacen la llamada ley de Hooke.

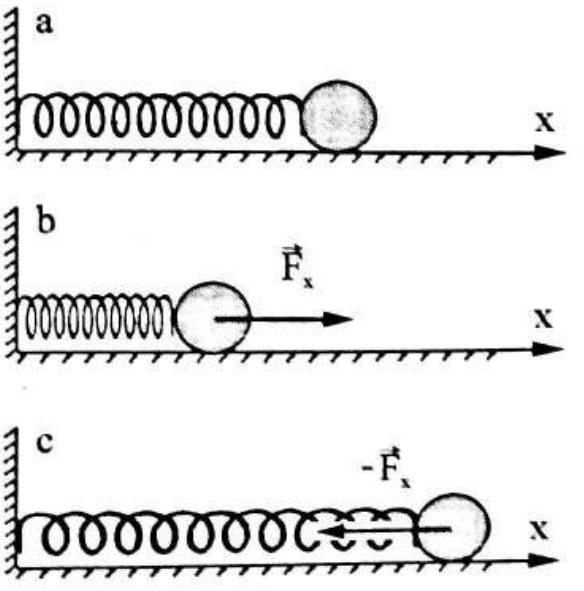


Fig. 2.6: Estiramiento y compresión de un resorte

La variación de la velocidad para una caída en el aire se ha tratado en la Unidad 1. Cinemática.

Esta ley se verifica experimentalmente mientras el desplazamiento $x - x_0$ es pequeño.

Al describir el dinamómetro, en el Capítulo 1, suponíamos que el resorte repite los valores de estiramiento cuando se repiten los valores de la fuerza aplicada (en particular, si se retira la fuerza aplicada, el resorte recupera la forma de reposo, o neutra). Este comportamiento se conoce como perfectamente elástico, y en términos matemáticos equivale a afirmar que existe una posición es una función lineal (o sea que se representa con una recta y no otra curva), el resorte, además de ser perfectamente elástico, es lineal, o proporcional, y se dice que cumple la ley de Hooke. Para hacer un dinamómetro no es imprescindible la linealidad. En los ejercicios de este curso propondremos a menudo resortes lineales, por la razón de que la fuerza que ejercen es más fácil de calcular cuando la deformación, que si no fueran lineales.

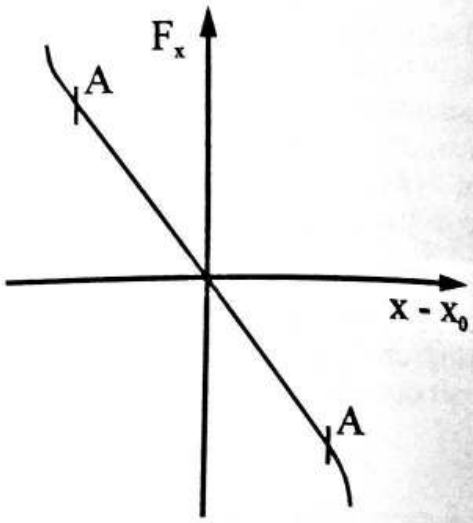


Fig. 2.7: Gráfico de F_x en función de $x - x_0$

Como se ilustra en la **Fig. 2.7** (puntos A) los resortes dejan de ser lineales para desplazamientos grandes y hasta pueden dejar de ser elásticos.

Es bueno remarcar la propiedad fundamental de la interacción elástica en el sentido de que sólo depende de la naturaleza del mecanismo que provee la fuerza, es decir, la constante k y la separación entre los cuerpos r, y no depende de las propiedades de los cuerpos en interacción.

Un resorte relajado tiene 0,3 m de longitud. Uno de sus extremos se fija a una pared y al otro se le aplica una fuerza de 50 N, produciendo un aumento de la longitud del resorte a 0,4 m. ¿Cuál es la constante elástica del resorte?

El módulo de la fuerza elástica es

$$F = k\,(x - x_o)$$

$$k = F/(x - x_o) \Rightarrow k = 50\ \text{N}/(0{,}4 - 0{,}3)\ \text{m} \Rightarrow \boxed{k = 500\ \text{N/m}}$$

Dos carritos A y B cuyas masa son $m_A = 5$ kg y $m_B = 8$ kg están unidos por un resorte que tiene una constante elástica $k = 400$ N/m y una longitud de 0,2 m cuando está relajado. Inicialmente ambos carritos están en reposo sobre una pista horizontal. Se aplica una $F = 120$ N al carrito B como indica la **Fig. 2.8**.

La aceleración inicial del carrito B es

$$a = F/m_B = 120 \text{ N}/8 \text{ kg}$$

$$\boxed{a = 15 \text{ m/s}^2}$$

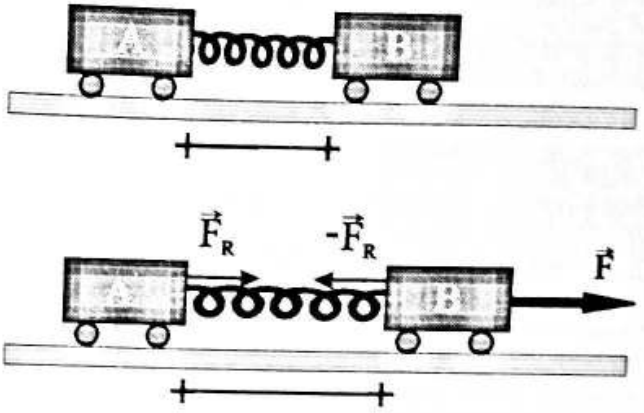


Fig. 2.8: Carritos A y B unidos por un resorte.

¿Cuáles son las aceleraciones de los carritos A y B, cuando el resorte tiene una longitud de 0,3 m?

La fuerza del resorte es

$$F_R = k\,(x - x_o) = (400 \text{ N/m})\,(0{,}3 \text{ m} - 0{,}2 \text{ m}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_R = 40 \text{ N}}$$

Sobre el carrito A actúa sólo la fuerza del resorte, entonces la aceleración de A es

$$a_A = F_R/m_A = 40 \text{ N}/5 \text{ kg} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_A = 8 \text{ m/s}^2}$$

En cambio sobre el carrito B actúan la fuerza F y la del resorte en sentido contrario, por lo tanto la aceleración sobre B es

$$a_B = (F - F_R)/m_B = (120 \text{ N} - 40\text{N})/8 \text{ kg} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_B = 10 \text{ m/s}^2}$$

Note que originalmente el resorte no está deformado y por lo tanto no ejerce fuerza sobre los carritos. B comienza a moverse aceleradamentente bajo la acción de $\vec{F}$ y estira el resorte, que aplica entonces $-\vec{F}_R$ a A y $\vec{F}_R$ a B. El valor de $\vec{F}_R$ depende del estiramiento, y éste a su vez del tiempo, de modo que las aceleraciones de los carritos cambian en el tiempo. Aquí se las ha calculado para un instante (y separación) dado.

En la industria es frecuente hallar resortes con la llamada **precarga**. Se trata de resortes que deben esforzarse a la tracción hasta un cierto valor de fuerza, para que comiencen a separarse sus apretadas espiras. No funcionan a la compresión.

2.3 FUERZA GRAVITATORIA

Las propiedades de la fuerza gravitatoria fueron estudiadas por Newton a partir de datos experimentales sobre el movimiento de los planetas del sistema solar, descriptos por las leyes empíricas de Kepler. Estas leyes afirman, en síntesis, que las órbitas son elipses, que el Sol esta en uno de los focos de cada elipse, que la velocidad areolar de cada planeta es constante y otras relaciones, todas ciertas pero, aparentemente, desconectadas entre sí. Las tres leyes de Newton (acción y reacción, inercia y masa) y la de gravitación explican todas esas propiedades enunciadas antes por Kepler, pero también explican los movimientos de los cometas y los de los cuerpos que se dejan caer o se arrojan en las proximidades del suelo. Como leyes, tienen más jerarquía las de Newton que las de Kepler, a pesar de que ambas aciertan.

Newton generalizó sus resultados enunciado su famosa

Ley de Gravitación Universal

Dos partículas de masa m_1 y m_2 separadas una distancia $|\vec{r}_{12}|$ se atraen por una fuerza que actúa a lo largo de la línea que une las dos partículas y cuyo módulo es

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2_{12}}$$

donde G es una constante universal cuyo valor no depende de las partículas que interactúan.

El físico inglés H. Cavendish determinó experimentalmente por primera vez el valor de la constante G en 1798, usando esferas de plomo de pocos centímetros de diámetro. El valor aceptado actualmente para la constante de gravitación es

$$G = 6{,}672\ 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$$

Debido al valor tan pequeño de G, la interacción gravitatoria entre cuerpos comunes sobre la superficie terrestre es despreciable, por ejemplo 2 esferas de 100 kg separadas 1 m se atraen con una fuerza

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$F = 6{,}7\ 10^{-11} \frac{N\ m^2}{kg^2} \frac{100\ kg \cdot 100\ kg}{(1\ m)^2}$$

$$\boxed{F = 6{,}7\ 10^{-7}\ N}$$

La Tierra, sin embargo, con su masa extraordinariamente grande, ejerce sobre todos los cuerpos cercanos a su superficie una fuerza gravitatoria intensa. Veamos:

Sea un cuerpo de masa m a una cierta altura h sobre la superficie terrestre: la fuerza que ejerce la Tierra sobre él será:

$$F = G \frac{m \; M_T}{(R_T + h)^2}$$

donde M_T y R_T son la masa y el radio de la Tierra respectivamente.

Por la segunda ley de Newton $F = m\ g$ donde g es la aceleración de la gravedad y por lo tanto

$$m\ g = G \frac{m \; M_T}{(R_T + h)^2}$$

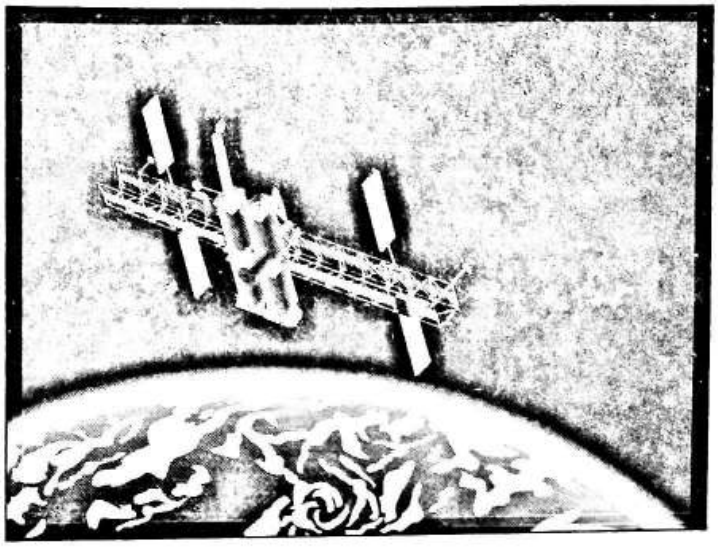


Fig. 2.9 a: satélite artificial orbitando.

Para cuerpos cercanos a la superficie, $h/R_T << 1$ y entonces

$$g \approx G \frac{M_T}{R_T^2}$$

Hemos visto en cinemática que lgl cerca de la superficie es 9,81 m/s^2 y conociendo el radio de la Tierra $R_T = 6{,}4\ 10^6$m podemos de la ecuación anterior encontrar su masa:

$$M_T \approx g \frac{R_T^2}{G}$$

$$M_T \approx \frac{(9{,}81\ m/s^2)\ (6{,}4\ 10^6\ m)^2}{6{,}7\ 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2}$$

$$\boxed{M_T \approx 6\ 10^{24}\ kg}$$

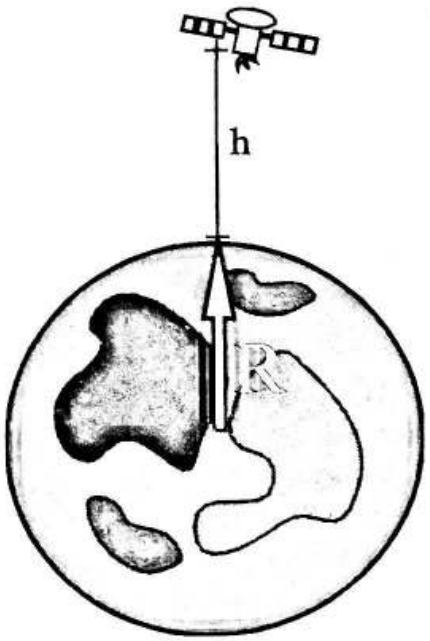


Fig. 2.9 b: Cuerpo a una altura h.

Ejemplo 2.9a

El movimiento de los planetas en el sistema solar puede analizarse a partir de la ley de Gravitación Universal y las leyes de movimiento. Si bien en la realidad esas órbitas son en general elipses, nosotros estudiaremos en este curso el caso particular, aunque no menos instructivo, de órbitas circulares.

Consideremos un cuerpo de masa m en una órbita circular alrededor de otro de masa M mucho mayor que m (M >> m) (por ejemplo, la Tierra y el Sol).

Como sabemos de la dinámica del movimiento circular, tendremos una fuerza centrípeta $f_c = m\ \omega^2 r$ que en este caso la provee la interacción gravitatoria, es decir:

$$G\frac{M\ m}{r^2} = m\ \omega^2 r \qquad (*)$$

Expresando la velocidad angular en función del período de revolución T, será:

$$G\ M = \frac{4\pi^2}{T^2} r^3$$

de donde

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\ \pi^2}{G\ M} = \text{constante} \quad (3^a \text{ ley de Kepler})$$

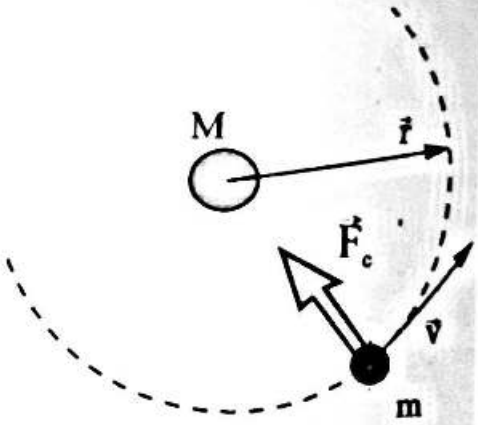


Fig. 2.10: Interacción gravitatoria entre M y m.

Ejemplo 2.9b

De vital importancia para las comunicaciones son los satélites sincrónicos, que tienen un período orbital igual al período de rotación de la Tierra sobre su eje. Dicho satélite, puesto en órbita en el plano ecuatorial parecería como «colgado» en el mismo punto sobre la superficie terrestre. ¿A qué distancia debe orbitar un satélite de este tipo?

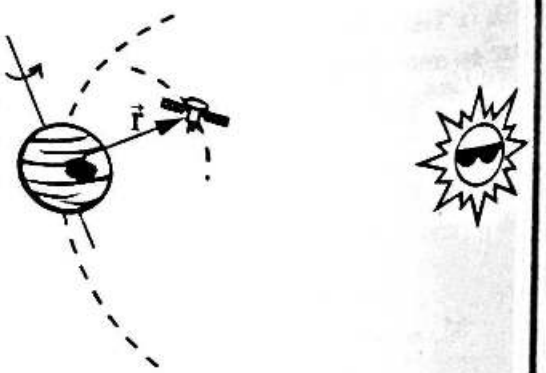


Fig. 2.11 a: Satélite artificial sincrónico.

* *Es oportuno decir aquí que la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria son la misma y única fuerza. A pesar de que tienen dos nombres no es que haya dos fuerzas aplicadas. Lo mismo sucede en otros ejemplos, con la fuerza de rozamiento, o la tensión de un hilo: todas ellas pueden ser centrípetas (solas o en conjunto).*
Debemos notar que la constante no depende de la masa del planeta, es decir que es la misma para cualquiera. Si se conocen el período y el radio de una órbita se puede obtener la masa del Sol.

Ejemplo 2.7:

Sabemos que

$$T = 24 \text{ hs}$$

y por lo tanto de

$$r^3 = \frac{T^2}{(4\ \pi^2/G\ M_T)}$$

resulta $\boxed{r \approx 42000 \text{ km}}$

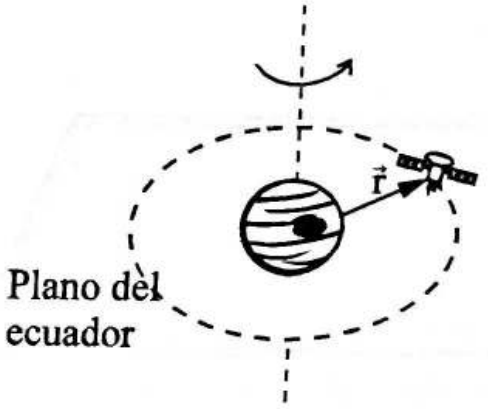


Fig. 2.11 b: Satélite artificial y sincrónico.

es decir aproximadamente a 36000 km de la superficie terrestre. En el año **1963** fue lanzado el primero de estos satélites y desde entonces, esa órbita sincrónica se ha poblado de numerosos artefactos de comunicaciones.

Ejemplo 2.8:

¿Cuál es la fuerza centrípeta que mantiene en órbita un satélite artificial de m = 1000 kg a 200 km de altura?. Si se toma como radio medio de la Tierra 6370 km, entonces el radio de la trayectoria del satélite será R = 6570 km. Obsérvese que en este caso no hemos establecido la velocidad orbital pues este parámetro queda fijado al dar los otros datos. La fuerza centrípeta es ahora la fuerza gravitatoria, por lo que

$$F_c = G\frac{M_T\, m}{R^2} = m\,\frac{v^2}{R}$$

donde M_T es la masa de la Tierra (masa puntual)

La constante de gravitación universal $G = 6{,}67\ 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$ y la masa de la Tierra es $5{,}98\ 10^{24}$ kg

$$F_c = 6{,}67\ 10^{-11}\ \frac{N\ m^2}{kg^2}\ \frac{5{,}98\ 10^{24}\ kg\ \ 10^3\ kg}{(6{,}57\ 10^6 m)^2}$$

$$\boxed{F_c = 9240{,}5 \text{ N}}$$

¿y cuál es la velocidad orbital del satélite?. De la ecuación anterior sale que:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R}} = 7791{,}6 \text{ m/s}$$

lo que significa una velocidad angular de

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{7791{,}6 \text{ m/s}}{6{,}57\ 10^6 \text{ m}} = 1{,}18\ 10^{-3}\ s^{-1}$$

y, por lo tanto, una frecuencia de giro

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1{,}18\ 10^{-3}\ s^{-1}}{2\pi} = 1{,}88\ 10^{-4}\ s^{-1}$$

Ejemplo 2.8:

Como el tiempo que tarda el satélite en realizar un giro es la inversa de f, este valor resulta de 5298 s, o sea una vuelta cada 1,47 hs.

Es interesante señalar que la velocidad orbital no depende de la masa del satélite, por lo que cualquier artefacto ubicado a 200 km de altura rodea la Tierra cada 1,47 hs, independientemente de su masa.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, si fuera un astronauta al mando de una nave espacial que quiere acoplarse con otra, ¿bastará con colocarse detrás de esta última en la misma órbita y acelerar hasta alcanzarla?

Ejemplo 2.9:

Si en una estación orbital de forma circular y de 100 m de radio se quiere simular una atracción gravitacional igual a la terrestre, ¿cuál debe ser la velocidad de giro de la misma? En la figura se representa dicha estación y el eje de giro. Un astronauta parado sobre un borde lateral como se indica, recibe sobre sus pies la acción de una fuerza centrípeta que produce el vínculo, dada por la rotación a velocidad $\vec{v}$ (el efecto es similar al del tambor del lavarropas visto en un ejemplo anterior). Lo que se requiere es que la $\vec{F}_c$ sea igualmente intensa que el peso normal de la persona cuando está en la Tierra.

$$F_c = m \frac{v^2}{r} = m\, g$$

$$\frac{v^2}{r} = g \quad \Rightarrow \quad v = (g\, r)^{1/2} \Rightarrow$$

$$v = (10\ m/s^2\ 100\ m)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\boxed{v = 31{,}62\ m/s}$$

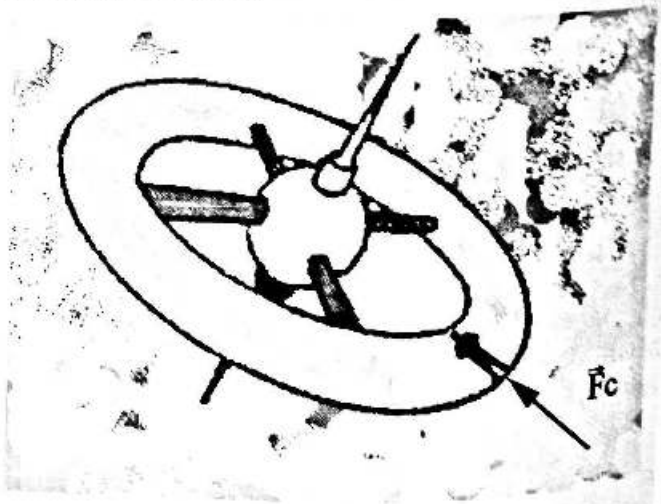


Fig. 2.12: Estación orbital.

o que implica que $\boxed{\omega = 0{,}316\ s^{-1}}$

y $f = \omega/2 \Rightarrow \boxed{f = 0{,}05\ s^{-1}}$ o sea 1 vuelta cada 20 segundos.

Ejemplo 2.10

En los extremos de un resorte se colocan dos esferas de masa M = 10000 kg y radio R = 1 m. Debido a la interacción gravitatoria entre las esferas el resorte se comprime, queremos calcular cuánto se comprimió.

K = 0,05 N/cm

L = 3 cm

La fuerza de interacción gravitatoria entre las esferas será

$$F = G\frac{M \cdot M}{(2R + L')^2} \qquad (1)$$

donde 2R + L' es la distancia entre sus centros y, como se indica en la **Fig. 2.13**, L' es la longitud de equilibrio final del resorte comprimido.

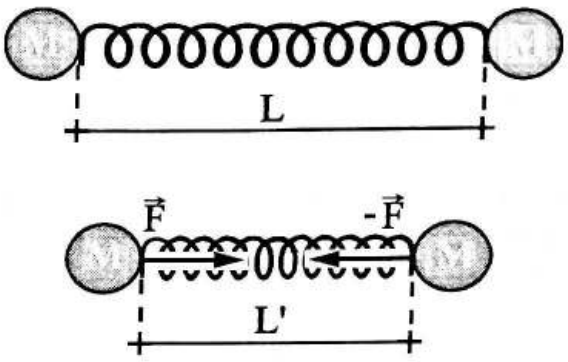


Fig. 2.13: Esferas unidas a los extremos de un resorte.

Para el equilibrio, esta fuerza atractiva debe ser compensada por la fuerza elástica del resorte:

$F = K\,\Delta L$, con $\Delta L = L - L'$ (longitud de compresión)

y de (1) podemos escribir

$$G\frac{M^2}{(2R + L')^2} = K\,\Delta L \Rightarrow G\,M^2 = K\,\Delta L\,(2R + L - \Delta L)^2$$

de donde podemos, matemática mediante, despejar el valor de ΔL, conocidos los valores de los otros parámetros. Sin embargo, la ecuación obtenida es cúbica en ΔL (es decir, aparecen las potencias ΔL^3, ΔL^2, ΔL) y su solución matemática no es sencilla. Para ejemplificarla, observemos que las fuerzas gravitatorias entre objetos de masas no muy grandes (comparadas con las astronómicas) son pequeñas. Entonces parece razonable esperar que el resorte se comprima muy poco, y que $\Delta L << L$. Adoptamos esta condición como hipótesis y observamos, del cálculo posterior, si es justificable:

$\Delta L << L \quad 2R + L - \Delta L \approx 2R + L \qquad G\,M^2 \approx K\,\Delta L\,(2R + L)^2$

y entonces $$\Delta L \approx \frac{G\,M^2}{K(2R + L)^2}$$

y reemplazando valores:

$$\Delta L \approx 0{,}033 \text{ m}$$

Se observa que $\Delta L << L = 3$ cm y nuestra aproximación está justificada.

2.3.1 LA LEY DE GRAVITACION Y SU EXPRESION VECTORIAL

Consideremos un sistema de referencia y dos partículas de masas m_1 y m_2 como se indica en la **Fig. 2.14.**

La Fuerza F_{21} ejercida por m_1 sobre m_2 será.

$$\vec{F}_{21} = - G\, m_1\, m_2 \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

el signo menos significa que $\vec{F}_{21}$ está dirigida hacia m_1, es decir, es atractiva. De la misma manera

$$\vec{F}_{21} = - G\, m_1\, m_2 \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|^3}$$

y como:

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{r}_{12}$$

tenemos $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ como esperábamos, pues las fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ forman un par de acción y reacción.

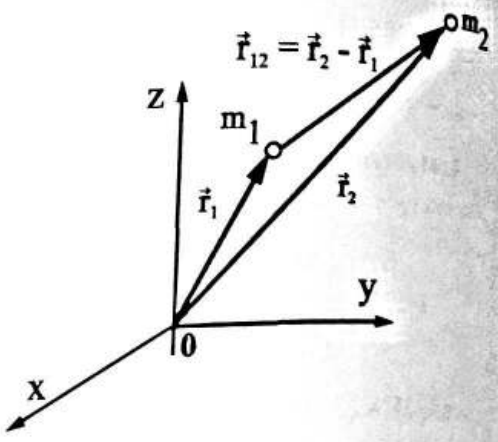


Fig. 2.14: Posiciones relativas de m_1 y m_2 respecto de un sistema de referencia.

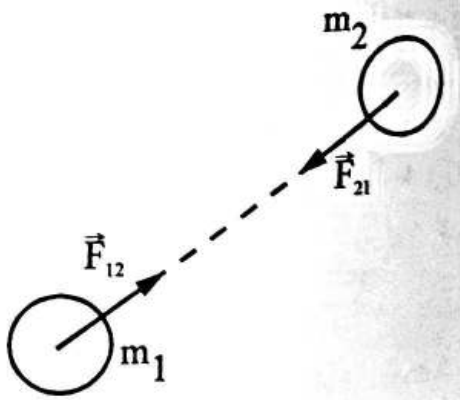


Fig. 2.15: Fuerzas de interacción gravitatoria.

2.4 OTRAS FUERZAS FUNDAMENTALES DE LA NATURALEZA

2.4.1 FUERZAS ELECTROSTATICAS

Hemos visto varios tipos de fuerza que, por experiencias cotidianas nos resultan muy familiares, y nos referiremos a una más. Seguramente alguna vez, hemos frotado una regla de plástico contra el cabello o la ropa y vimos cómo pequeños papelitos eran atraídos por la regla. La naturaleza de esta fuerza es eléctrica. La experiencia nos demuestra que los cuerpos pueden estar o no cargados y que existen dos tipos de cargas (negativas y positivas: exceso de electrones o falta de ellos). Sean q_1 y q_2 las cargas de dos partículas separadas una distancia r, el físico francés Coulomb demostró

el siglo pasado que la fuerza de interacción entre estas dos cargas está dada por

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Observe que la dependencia con la distancia r es de la misma forma que la interacción gravitatoria: En el sistema MKS la unidad de carga es el Coulomb (C), y la constante K de la ley de Coulomb vale 9.10^9 N m²/C².

A pesar de que, para nuestros ojos, la materia es eléctricamente neutra, en su interior la fuerza eléctrica es la que mantiene sus constituyentes (los átomos) unidos. Si bien la interacción gravitatoria está siempre presente, ésta es muy pequeña, en los tamaños atómicos, comparada con la fuerza eléctrica. Para demostrar esto, comparemos la atracción gravitatoria entre un electrón y un protón con la atracción coulombiana:

$m_p = 1840\ m_e$ y $q_p = +q_e$; $m_e = 9{,}1\ 10^{-31}$kg y $q_e = -1{,}6\ 10^{-19}$ C

y por lo tanto

$$\frac{\text{Atracción Gravitatoria}}{\text{Repulsión Coulombiana}} \approx 10^{-39}$$

Aunque en este curso nos hemos referido a las fuerzas elásticas y de contacto como si fueran de diferente tipo que las electrostáticas, la verdad es que a escala microscópica todas ellas son fuerzas del mismo tipo y son de origen eléctrico. Cuando apoyamos un objeto sobre una mesa, es la repulsión electrostática entre los electrones la que mantiene suspendido al objeto. Un fuerte puñetazo no es más que un conjunto de interacciones electromagnéticas.

2.4.2 FUERZAS NUCLEARES

Concluímos esta sección con una breve discusión de las fuerzas nucleares. Aunque las fuerzas eléctricas mantienen unidos a los átomos, ellas por sí solas no permitirían la existencia de los núcleos atómicos puesto que los protones al tener la misma carga se repelerían. Las fuerzas nucleares, provistas por la llamada «interacción fuerte», son las que mantienen unidos a los protones y neutrones en un núcleo. Sabemos que existen, conocemos aproximadamente su rango, 10^{-15} m que es justamente el orden del tamaño de los núcleos, pero nadie hasta ahora ha podido encontrar su dependencia con r u otros parámetros. Dentro de ciertas aproximaciones, esta fuerza nuclear es del tipo

$$F \approx \frac{1}{r^2} e^{-r/r_o} \qquad r_o \approx 10^{-15}\ \text{m}$$

Para terminar, comparemos en una tabla las magnitudes de las diferentes fuerzas entre protones separados una distancia de 10^{-15} m.

Interacción	Magnitud de la Fuerza
Gravitatoria	10^{-34}
Coulombiana	10^{2}
Fuerte	10^{3}

UNIDAD 4 ESTATICA

CAPITULO 1 CUERPOS PUNTUALES

Las fuerzas aplicadas a un cuerpo generalmente producen una aceleración; cuando la aceleración es nula entramos al campo de la estática.

1.1 - Equilibrio de cuerpos puntuales[1].

Un cuerpo puntual bajo la acción de un conjunto de fuerzas adquiere una aceleración que cumple:

$$\boxed{\vec{f} = m\vec{a}}$$

Donde m es la masa y $\vec{a}$ la aceleración del cuerpo puntual, mientras que $\vec{f}$ es la suma vectorial de todas las fuerzas aplicadas:

$$\boxed{\vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n}^{2}$$

En el caso ***estático,*** la aceleración del cuerpo puntual es cero, entonces:

$$\boxed{\vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0}$$

Y decimos que el cuerpo puntual está en **equilibrio.**

En otras palabras:

> *Si un cuerpo puntual está en equilibrio, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él es nula.*

Note que ***equilibrio*** no significa *reposo,* dado que, siendo $\vec{a} = 0$, el cuerpo puntual puede moverse con un movimiento rectilíneo uniforme respecto del sistema de referencia que hemos elegido. Sin embargo, todos los sistemas de referencias inerciales son equivalentes para las Leyes de la Dinámica, de modo que en cualquiera se cumple que $\vec{f} = 0$. Por lo tanto generalmente se adopta en forma convencional un sistema de referencia en reposo respecto del cuerpo puntual cuya aceleración es nula, que es lo más natural y cómodo para realizar mediciones experimentales.

Dado que la condición de equilibrio $\vec{f} = 0$ es suficiente para el análisis de casos particulares, asumiremos por conveniencia que el objeto bajo estudio se halla en reposo respecto del sistema de referencia elegido.

---

1 *Llamamos cuerpo puntual a todo cuerpo de extensión idealmente nula.*
2 *En los ejemplos de aplicación veremos como se utiliza esta notación.*

Veamos algunos ejemplos de cuerpos puntuales en equilibrio:

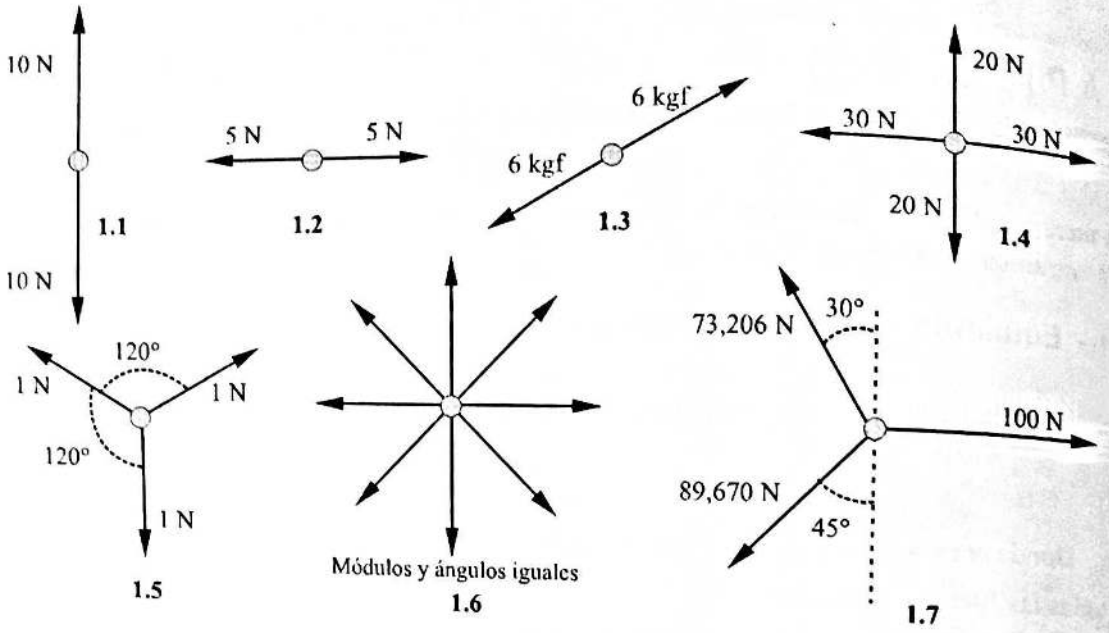


Fig. 1 - Cuerpos puntuales en equilibrio

Y como casos contrarios, podemos observar los siguientes ejemplos.

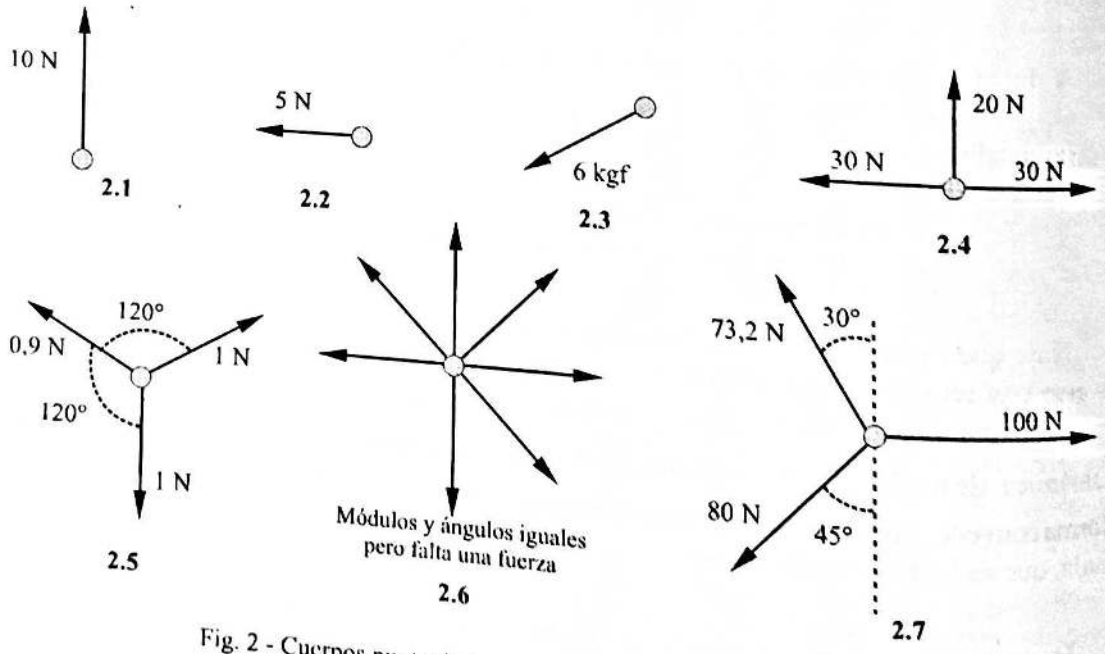


Fig. 2 - Cuerpos puntuales que no están en equilibrio

Analicemos y comparemos los casos de ambas figuras, Fig. 1 y Fig. 2. En los casos (1.1) al (1.4) de la Fig. 1 es fácil verificar que los cuerpos puntuales se hallan en equilibrio.

A cada fuerza del sistema de fuerzas[3] le corresponde otra fuerza de iguales módulo y dirección y sentido opuesto, de modo tal que se anulan de a pares. Los casos (1.5), (1.6) y (1.7) no son tan evidentes, aunque (1.5) y (1.6) podrían analizarse, sin ecuaciones, por la simetría con que están dispuestas las fuerzas. El caso (1.7), finalmente, no admite consideraciones de simetría evidentes y es necesario comprobar matemáticamente la condición de equilibrio $\vec{f} = 0$; sumando vectorialmente las fuerzas del sistema. Pasemos antes de plantear este método matemático a la descripción de los casos de la Fig.2.

Se decide rápidamente la situación de desequilibrio ya que la agrupación de pares opuestos de fuerzas se pierde. En los casos (2.1) al (2.3) hay una única fuerza actuando sobre el cuerpo puntual sin equilibrar. La fuerza que "falta" en los ejemplos (2.1) al (2.4) con respecto a los casos correspondientes de la Fig. 1 es la fuerza necesaria para equilibrar al cuerpo puntual, la cual llamaremos *equilibrante*.

También "falta" una fuerza en el sistema de la Fig. (2.6) y se pierde la disposición simétrica que llevaba al cuerpo puntual al equilibrio. Observe que también se pierde la simetría en el caso (2.5), porque las tres fuerzas ya no son de igual módulo. Como antes, el caso (2.7) es un ejemplo menos evidente para anticipar que ese cuerpo puntual no está en equilibrio.

En todos los casos de la Fig. 2 la sumatoria de fuerzas en cada uno de los cuerpos puntuales es distinta de cero. Entonces llamaremos *resultante*[4] $\vec{f}'$ a dicha sumatoria de fuerzas y podemos expresarla:

$$\boxed{\vec{f}' = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots + \vec{F}_{n-1}}$$

Y definimos la fuerza equilibrante $\vec{e}$, como $\vec{e} = -\vec{f}'$, que es la fuerza que "falta" para que el cuerpo puntual esté en equilibrio.

Tal que: $\boxed{\vec{f} = \vec{f}' + \vec{e} = 0}$ o sea $\vec{f} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots + \vec{F}_{n-1} \right) + \vec{F}_n = 0$, donde $\vec{F}_n$ es la fuerza equilibrante $\vec{e}$.

Resumiendo, como vemos son necesarias las sumas vectoriales de fuerzas para verificar si el cuerpo puntual está en equilibrio o para hallar la fuerza necesaria que hay que agregar para que esté en equilibrio. Para hallar $\vec{f}$, $\vec{f}'$ o $\vec{e}$ podemos realizar la *composición* de fuerzas, y es el tema que desarrollaremos a continuación.

1.2 - Composición de fuerzas concurrentes

Las fuerzas[5] que actúan sobre un cuerpo puntual están aplicadas en un mismo punto, (el cuerpo). Por esta razón decimos que las fuerzas son *concurrentes*. Para sumar o componer un número cualquiera

3 *Sistema de fuerzas es el conjunto de fuerzas que están aplicadas a un cuerpo, a veces diremos sólo sistema.*
4 *En secciones posteriores ampliaremos el concepto de resultante al de sistema equivalente con más detalle.*
5 *Las fuerzas son magnitudes vectoriales, de modo que se sumarán de acuerdo a las reglas generales presentadas en el Apéndice matemático, Capítulo 2.*

de fuerzas concurrentes es sólo necesario que sepamos sumar dos, dado que podemos sumar la resultante parcial con una tercera fuerza, y esta nueva resultante parcial con una cuarta, etc., hasta completar la totalidad de fuerzas del sistema.

Existen dos métodos básicos: el *método gráfico* que se basa en construcciones geométricas en escala, y el *método analítico* que se basa en las *proyecciones* de las fuerzas sobre un par de ejes no paralelos.

El *método gráfico* consiste en la aplicación de la llamada ***"regla del paralelogramo"*** que se ilustra en la Fig.3:

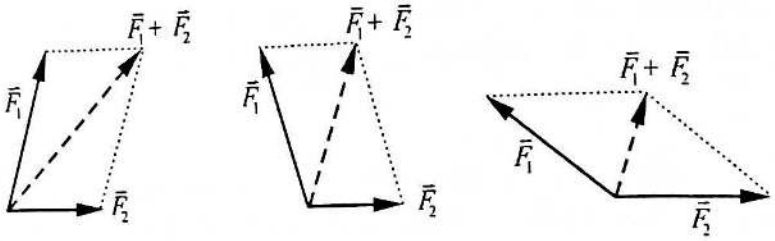


Fig. 3 - Regla del paralelogramo

Esta construcción puede transformarse en un triángulo llevando las fuerzas paralelamente una a continuación de la otra, como se indica en la Fig. 4; en este caso el vector suma tiene su origen en la primer fuerza y el extremo coincide con el extremo de la segunda.

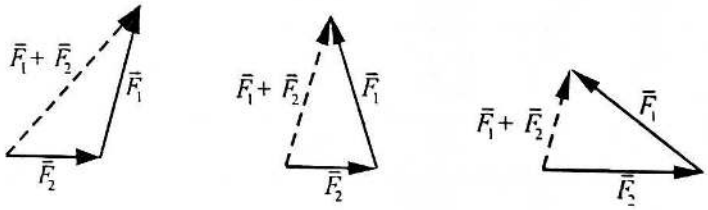
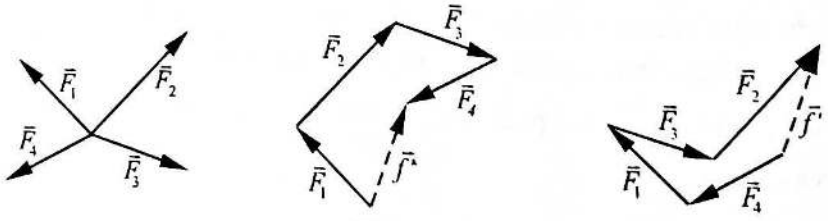


Fig. 4 - Triángulo de fuerzas

Y que tiene la ventaja de poder sumar más de dos fuerzas en un mismo gráfico, llevando sucesivamente una fuerza a continuación de la anterior, como se muestra en la Fig. 5:



caso a

caso b

Fig. 5 - Polígono de fuerzas

Esta construcción suele denominarse *polígono de fuerzas*. Note en la Fig. 5 el *traslado paralelo* de las fuerzas y que los resultados no *dependen del orden* en que se las toma para formar el polígono: el orden $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ en el caso a y el orden $\vec{F}_4, \vec{F}_1, \vec{F}_3, \vec{F}_2$ en el caso b son equivalentes; en ambos la suma de las fuerzas es $\vec{f}'$.

En general las fuerzas del sistema se hallan en cualquier orientación en el espacio tridimensional, de modo que el polígono de fuerzas resulta también una figura de tres dimensiones. A lo largo de este curso trabajaremos únicamente con **sistemas planos de fuerzas**, es decir, todas las fuerzas del sistema se hallarán contenidas en un mismo plano, y el polígono de fuerzas será, entonces, una figura plana.

El *método analítico* de composición de fuerzas más usual se basa en realizar las proyecciones de las fuerzas sobre un par de ejes cartesianos, perpendiculares entre si, suele también conocerse como *método de las proyecciones.*

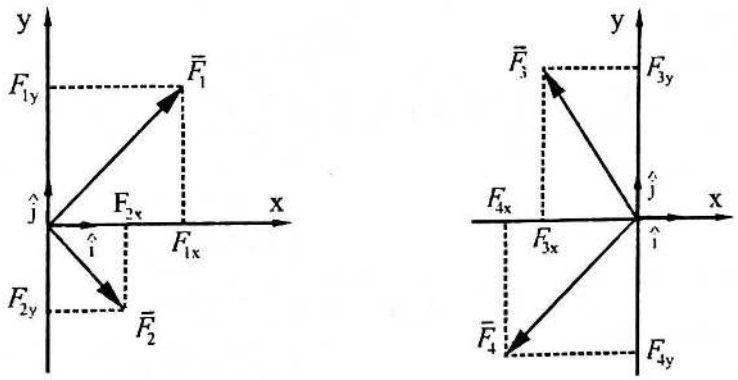


Fig. 6.a - Proyecciones de fuerzas

En la Fig. 6-a F_{1x} y F_{1y} son las proyecciones de $\vec{F}_1$; F_{2x} y F_{2y} son las proyecciones de $\vec{F}_2$; etc.; sobre los ejes x e y respectivamente.

En este método a las proyecciones de cada fuerza, se les asignan números llamados componentes escalares, que pueden ser positivos o negativos según la orientación de las fuerzas en relación a los ejes.

Se pueden calcula las componentes escalares de cada fuerza en función del módulo de la fuerza y de la correspondiente función trigonométrica asociada al ángulo que se conozca, ya que F_{1x}, F_{1y} y $\vec{F}_1$ determinan un triángulo rectángulo.

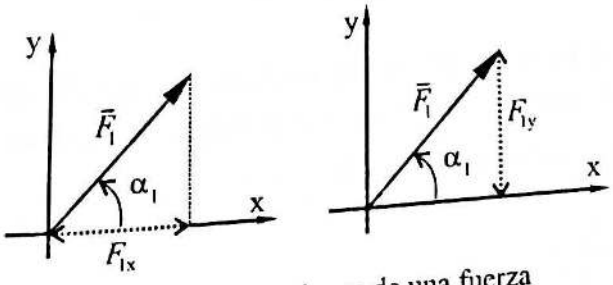


Fig. 6.b - Proyecciones de una fuerza

En la Fig. 6.b; $F_{1x} = \left|\vec{F}_1\right| cos\,\alpha_1$ y $F_{1y} = \left|\vec{F}_1\right| sen\,\alpha_1$; siendo α_1 es el ángulo medido desde el semieje positivo de las x, en sentido antihorario, hasta la semirrecta que representa la dirección de $\vec{F}_1$, en este caso se lo considera positivo (en sentido horario negativo); y así sucesivamente podemos obtener todas las componentes escalares de las fuerzas que están aplicadas a un cuerpo puntual.

En términos de los versores $(\breve{i}\,;\breve{j})$, asociados a los ejes x e y podemos escribir:

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\,\breve{i} + F_{1y}\,\breve{j}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\,\breve{i} + F_{2y}\,\breve{j}$$

.....

$$\vec{F}_{n-1} = F_{(n-1)x}\,\breve{i} + F_{(n-1)y}\,\breve{j}$$

Por lo tanto, la resultante $\vec{f}'$ es:

$$\vec{f}' = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n-1} (F_{ix}\,\breve{i} + F_{iy}\,\breve{j}) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_{ix}\right)\breve{i} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_{iy}\right)\breve{j}$$

$$\vec{f}' = f'_x\,\breve{i} + f'_y\,\breve{j} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{f'_x = \sum_{i=1}^{n-1} F_{ix}} \\ \boxed{f'_y = \sum_{i=1}^{n-1} F_{iy}} \end{cases}$$

O sea la suma de un sistema de fuerzas aplicadas a un cuerpo puntual se puede hallar a partir de la suma de las componentes escalares de cada una de las fuerzas y los versores asociados a los ejes elegidos.

Luego, el método de las proyecciones puede resumirse en las siguientes operaciones:

a) Definir un par de ejes cartesianos, es decir perpendiculares, centrados en el cuerpo puntual.
b) Trazar las proyecciones y calcular las componentes de todas las fuerzas del sistema.
c) Hallar las componentes escalares de la resultante, sumado las componentes de todas las fuerzas según cada eje.
d) Expresar vectorialmente la resultante.

Esta última operación se puede realizar: **I)** mediante el uso de versores o **II)** calculando el módulo de la resultante con el teorema de Pitágoras y luego calcular el ángulo que forma la dirección de $\vec{f}'$ con el semieje positivo de las x,[5].

I) $\boxed{\vec{f}' = f'_x\,\breve{i} + f'_y\,\breve{j}}$ (1)

II) $\boxed{|\vec{f}'| = \sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}$ (2) y $\boxed{\alpha = arctg\left(\frac{f'_y}{f'_x}\right)}$ (3)

5 También puede usarse otro criterio para indicar la dirección de la fuerza en el plano (x,y) en lugar del ángulo mencionado.

Sabiendo que:

$$f'_x = \sum_{i=1}^{n-1}\left(F_{1x} + ... + F_{(n-1)x}\right) \quad \text{y} \quad f'_y = \sum_{i=1}^{n-1}\left(F_{1y} + ... + F_{(n-1)y}\right) \qquad (4)$$

Entonces, reemplazando en Ec.(4) los módulos de las fuerzas y las funciones trigonométricas correspondientes obtenemos f'_x y f'_y; luego utilizando la Ec.(1) podemos expresar vectorialmente la resultante $\vec{f}'$. También podemos hacerlo reemplazando f'_x y f'_y en la Ec.(2) y en la Ec.(3), o sea calcular el módulo de $\vec{f}'$ y el ángulo α indicado en la Fig. 7, que es otra forma de expresar un vector.

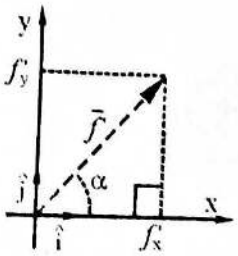


Fig. 7 - Proyecciones de la resultante

De acuerdo a los signos de las componentes escalares f'_x y f'_y de la resultante, se puede anticipar en qué cuadrante está la misma, respecto del sistema de referencia cartesiano utilizado, Fig. 8:

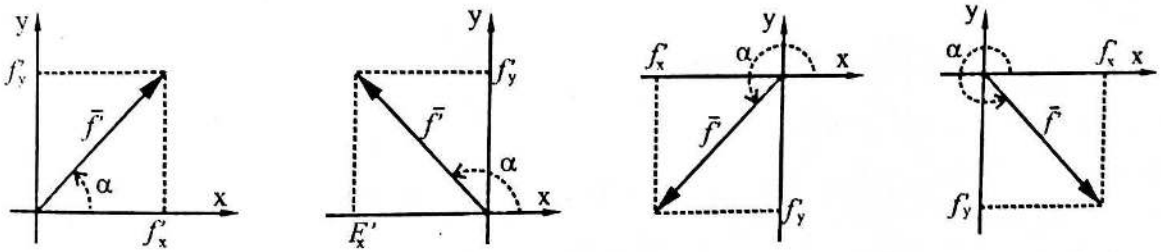


Fig. 8 - Resultantes en los distintos cuadrantes.

1.2.1 - Ejemplos de aplicación

Verificar si el cuerpo puntual de la Fig. 1 **(1.7)** está en equilibrio:

$|\vec{F}_1| = 100$ N

$|\vec{F}_2| = 73{,}206$ N

$|\vec{F}_3| = 89{,}670$ N

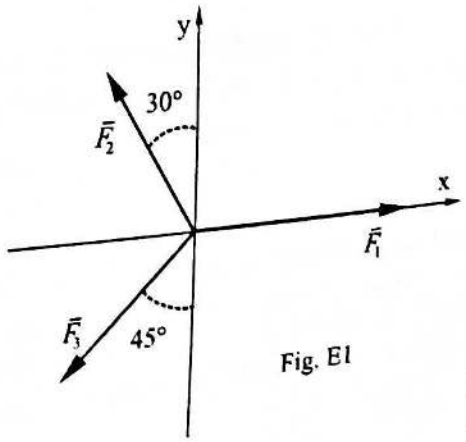


Fig. E1

Se puede deducir de la figura que:

$$\alpha_1 = 0° \;;\; \alpha_2 = 30° + 90° = 120° \text{ y } \alpha_3 = 180° + 45° = 225°$$

Si el cuerpo está en equilibrio se cumple que $\vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, tal que también se cumple:

$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = \sum_{i=1}^{n} (F_{1x} + ... + F_{nx}) = 0 \\ f_y = \sum_{i=1}^{n} (F_{1y} + ... + F_{ny}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{f_x = \sum_{i=1}^{3} (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}) = 0} \\ \boxed{f_y = \sum_{i=1}^{3} (F_{1y} + F_{2x} + F_{3x}) = 0} \end{cases} \qquad (1)$$

En la Fig. E1 ya están dibujados los ejes x e y. Con los datos calculemos las componentes escalares de las fuerzas:

$$\vec{F}_1 \Rightarrow \begin{cases} F_{1x} = |\vec{F}_1| \cos 0° = 100 \text{ N} \\ F_{1y} = |\vec{F}_1| \operatorname{sen} 0° = 0 \end{cases}$$

$$\vec{F}_2 \Rightarrow \begin{cases} F_{2x} = |\vec{F}_2| \cos 120° = |\vec{F}_2| \,(-0,5) = 73,206 \text{ N } (-0,5) \\ F_{2y} = |\vec{F}_2| \operatorname{sen} 120° = |\vec{F}_2| \,\sqrt{3}/2 = 73,206 \text{ N } \sqrt{3}/2 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\vec{F}_3 \Rightarrow \begin{cases} F_{3x} = |\vec{F}_3| \cos 225° = |\vec{F}_3| \,(-\sqrt{2}/2) = 89,670 \text{ N} (-\sqrt{2}/2) \\ F_{3y} = |\vec{F}_3| \operatorname{sen} 225° = |\vec{F}_3| (-\sqrt{2}/2) = 89,670 \text{ N} (-\sqrt{2}/2) \end{cases}$$

Observe que no hay componente de $\vec{F}_1$ sobre el eje **y**, porque el ángulo entre la dirección de la fuerza y el eje x es 0° y el $sen\ 0° = 0$. Los signos de las componentes escalares quedan determinados por las funciones trigonométricas usadas para cada ángulo α_i, tal como fue definido anteriormente.

También pueden usarse los ángulos dados en la figura, pero las funciones trigonométricas de dichos ángulos no son necesariamente las mismas que usamos con los α_i para hallar las componentes escalares.

Como son ángulos del primer cuadrante y las funciones seno y coseno son positivas, entonces los signos de las componentes deben anticiparse según el cuadrante y el semieje que corresponda a la proyección de la fuerza, por ejemplo:

$F_{2x} = -|\vec{F}_2| \operatorname{sen} 30$ es equivalente a $F_{2x} = |\vec{F}_2| \cos 120°$ porque $-sen\,30° = cos\,120°$

Reemplazando los resultados parciales de Ec. (2) en Ec.(1), resulta:

$$\begin{cases} f_x = \sum_{i=1}^{3} (100\,\text{N} + 73,206\,\text{N}(-0,5) + 89,670\,\text{N}(-\sqrt{2}/2)) = 0,00031\,\text{N} \Rightarrow \boxed{f_x \approx 0} \\ f_y = \sum_{i=1}^{3} (0 + 73,206\,\text{N}\ \sqrt{3}/2 + 89,670\,\text{N}(-\sqrt{2}/2)) = -0,00029\,\text{N} \Rightarrow \boxed{f_y \approx 0} \end{cases}$$

Para realizar las cuentas se ha utilizado $\sqrt{3}/2 \approx 0,866$ y $\sqrt{2}/2 \approx 0,707$. La suma de las componentes escalares de las fuerzas según los ejes x e y resultaron aproximadamente nulas. Luego, podemos decir que el cuerpo puntual de la Fig. 1 (1.7) está en equilibrio teniendo en cuenta las aproximaciones con que se trabajó al realizar las cuentas.

Se podría también verificar que el cuerpo puntual de la Fig.1 (1.7) está en equilibrio por otro camino, por ejemplo; hallando la resultante parcial entre $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ que debería dar $\vec{f}'_{2,3} \approx -100\,\text{N}\,\vec{i}$. Les dejamos a ustedes la explicación.

Dos fuerzas de 70 kgf que forman entre sí un ángulo de 65° actúan sobre un cuerpo puntual. Determinar la fuerza necesaria para que el cuerpo puntual esté en equilibrio.

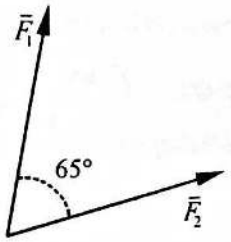


Fig. E2a

Para hallar la fuerza equilibrante $\vec{e}$, es necesario hallar la resultante $\vec{f}'$, ya que hemos definido: $\vec{e} = -\vec{f}'$

Calculemos $\vec{f}'$; para ello usando el método gráfico, construimos el triángulo de fuerzas llevando, por ejemplo, $\vec{F}_2$ a continuación de $\vec{F}_1$, y hallamos $\vec{f}'$; y como ya sabemos $\vec{e}$ es la fuerza de igual módulo y dirección y sentido contrario a $\vec{f}'$, como se indica en la Fig. E2b.

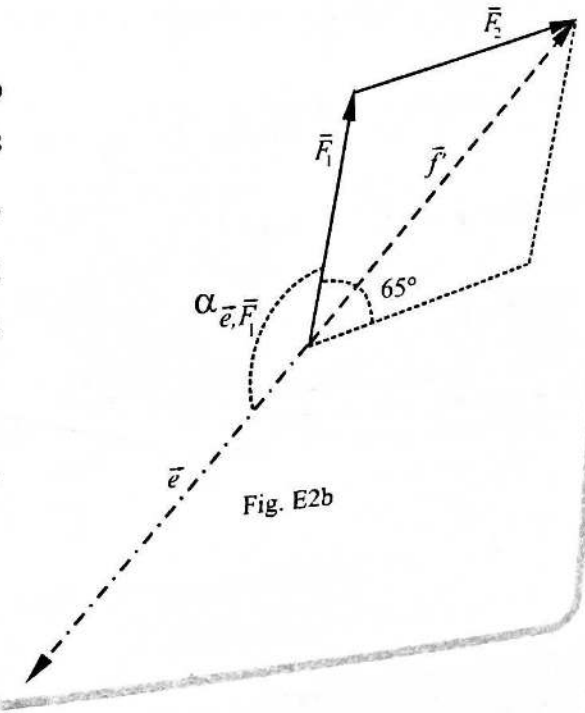


Fig. E2b

Supuesta una escala para el gráfico se puede medir en él directamente el módulo de $\vec{e}$.

Podemos hallar el ángulo $\alpha_{\vec{e},\vec{F}_1}$, que es el ángulo entre la dirección de la equilibrante y la dirección de $\vec{F}_1$, entonces:

$$\alpha_e = 180° - 0{,}5 \cdot 65° = 147°30'$$

Dado que la diagonal del paralelogramo de fuerzas, coincide con la dirección de $\vec{e}$, divide al ángulo de 65° formado por las fuerzas del sistema en dos ángulos iguales, porque el paralelogramo en este caso es un rombo, o sea, tiene lados iguales.

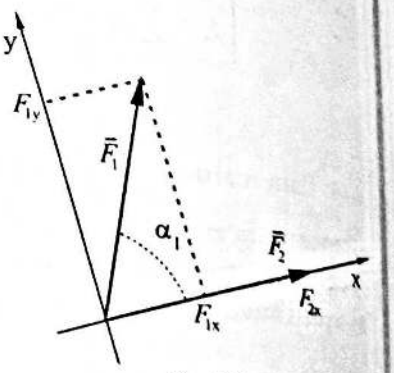


Fig. E2c

Apliquemos ahora el método analítico de proyecciones. Para ello debemos elegir un sistema de ejes cartesianos. Cualquiera que elijamos es adecuado, pero podemos simplificar las matemáticas si colocamos uno de los ejes paralelo a una de las fuerzas. Elegimos entonces los ejes de la Fig. E2c.

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 70 \text{ kgf} \quad ; \quad \alpha_1 = 65° \; ; \; \alpha_2 = 0$$

Calculemos las componentes escalares respecto de los ejes ***x*** e ***y*** de cada fuerza:

$$\vec{F}_1 \Rightarrow \begin{cases} F_{1x} = |\vec{F}_1| \cos 65° \\ F_{1y} = |\vec{F}_1| \operatorname{sen} 65° \end{cases} \qquad \vec{F}_2 \Rightarrow \begin{cases} F_{2x} = |\vec{F}_1| \cos 0 \\ F_{2y} = |\vec{F}_1| \operatorname{sen} 0 = 0 \end{cases}$$

Siendo: $\vec{f}' \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}'_x = (F_{1x} + F_{2x})\,\vec{i} \\ \vec{f}'_y = (F_{1y} + F_{2y})\,\vec{j} \end{cases}$

Reemplazando: $\begin{cases} \vec{f}'_x = \left(|\vec{F}_1| \cos 65° + |\vec{F}_1| \cos 0°\right)\vec{i} = 99{,}5833 \text{ kgf } \vec{i} \\ \vec{f}'_y = \left(|\vec{F}_1| \operatorname{sen} 65° + 0\right)\vec{j} = 63{,}4415 \text{ kgf } \vec{j} \end{cases}$

Luego si:

$$\boxed{\vec{f}' = 99{,}6 \text{ kgf } \vec{i} + 63{,}4 \text{ kgf } \vec{j}}$$

Y siendo: $\vec{e} = -\vec{f}'$

Resulta:

$$\boxed{\vec{e} = -99{,}6 \text{ kgf } \vec{i} - 63{,}4 \text{ kgf } \vec{j}}$$

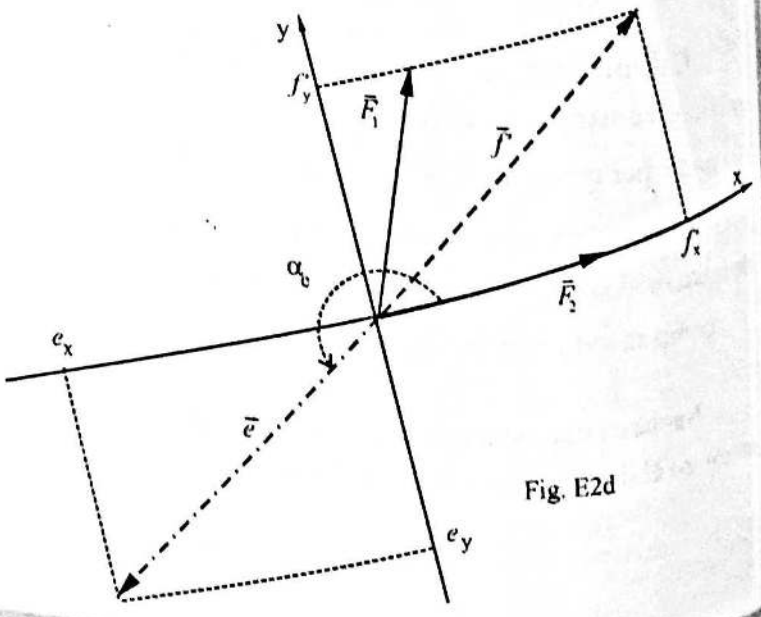


Fig. E2d

También podemos calcular el módulo de $\vec{e}$

$$|\vec{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \Rightarrow |\vec{e}| = \sqrt{(-99,6\,\text{kgf})^2 + (-63,4\,\text{kgf})^2}$$

$$\boxed{|\vec{e}| \approx 118,1\ \text{kgf}}$$

Y la dirección de $\vec{e}$ con el semieje positivo de las x formará un ángulo α_e:

$$\alpha_e = arctg\left(\frac{e_y}{e_x}\right) \Rightarrow \alpha_e = arctg\left(\frac{-63,4\,\text{kgf}}{-99,6\,\text{kgf}}\right)$$

$$\boxed{\alpha_e = 212^\circ\ 30'}$$

Resultó un ángulo del 3er. cuadrante como era de esperarse, ya que las componentes escalares de $\vec{e}$ son negativas según el sistema de referencia elegido.

1.3 - Descomposición de fuerzas

En muchos casos es necesario hallar un sistema de fuerzas equivalente a una única fuerza dato. O sea un sistema cuya resultante coincida con la fuerza dato. Del sistema se conocen las direcciones o rectas de acción de las fuerzas y se desea averiguar sus intensidades.

En el plano este problema admite una única solución cuando las direcciones de ***descomposición*** de la fuerza dato son dos, concurrentes a un punto sobre la recta de acción de la fuerza dato. Las fuerzas así obtenidas se denominan componentes de la fuerza dato en las direcciones dadas.

Hemos ya visto un caso de descomposición de fuerzas al hallar las proyecciones de una fuerza sobre un par ejes cartesianos. Con la notación que ya usamos en la sección 1.2, podemos expresar la fuerza $\vec{F}$:

$$\vec{F}_x = F_x\,\check{i}\ ;\ \vec{F}_y = F_y\,\check{j} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y}$$

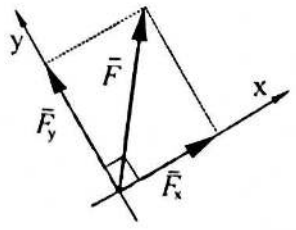


Fig. 9.a - Descomposición de una fuerza en dos direcciones perpendiculares

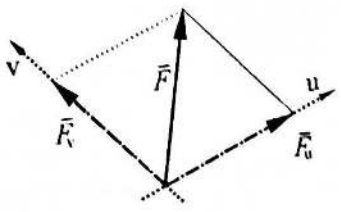


Fig. 9.b - Descomposición de una fuerza en dos direcciones no perpendiculares

En general, para un par de direcciones (u,v) no necesariamente perpendiculares, $\vec{F} = \vec{F}_u + \vec{F}_v$, Fig. 9b.

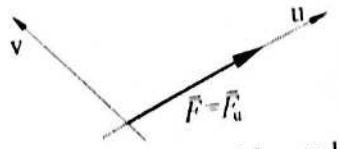


Fig. 10 - La fuerza coincide con la componente vectorial en esa dirección.

Cuando de las dos direcciones en que se desea descomponer una fuerza, una de ellas coincide con la dirección de la fuerza, entonces la fuerza componente es coincidente a la fuerza que se desea descomponer, y la componente en la otra dirección es nula.

Note que la afirmación habitual de que la componente de una fuerza según una dirección perpendicular es nula, sólo vale para el caso de dos direcciones perpendiculares. El ejemplo siguiente muestra cómo es perfectamente posible que una fuerza tenga componente no nula en una dirección perpendicular (siempre que la otra dirección no sea paralela a la fuerza)

En este ejemplo se ve claramente que no hay que confundir la *proyección* (componente escalar) de una fuerza sobre una dirección con la *componente vectorial* de la fuerza sobre esa misma dirección: la *proyección* (componente escalar) se determina trazando rectas perpendiculares a la dirección dada desde los extremos del vector fuerza. La componente vectorial, trazando rectas paralelas a la otra dirección de descomposición.

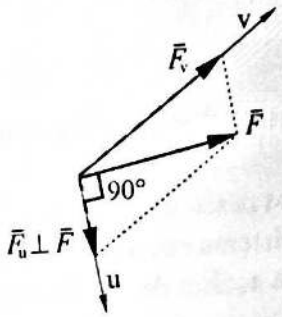


Fig. 11 - La fuerza tiene una componente vectorial perpendicular a ella.

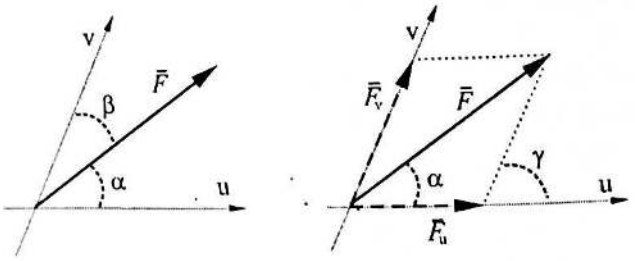


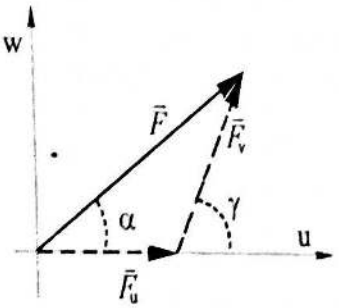
Fig.12.a - Componentes vectoriales de una fuerza en las direcciones (u,v)

Si las direcciones de descomposición son perpendiculares, las componentes escalares y vectoriales coinciden en valor absoluto, pero es el único caso en que esto ocurre.

Veamos cómo se realiza la descomposición de una fuerza en dos direcciones concurrentes.

Los datos del problema son la intensidad de $\vec{F}$, fuerza a descomponer, el ángulo que forman con una de las direcciones y el ángulo entre las dos direcciones, como se muestra en la Fig. 12a.

Como $\vec{F} = \vec{F}_u + \vec{F}_v$ podemos utilizar los métodos de suma de vectores como la regla del paralelogramo, que nos lleva al triángulo de la Fig.12.b o el de las proyecciones.



Consideremos un eje **w** perpendicular a **u.** Las proyecciones de las fuerzas $\vec{F}$ y $\left(\vec{F}_u + \vec{F}_v\right)$ sobre los ejes **u** y **w** deben ser iguales por la igualdad de las fuerzas. Luego podemos escribir:

proyecciones sobre **u** $\Rightarrow$ $\left|\vec{F}\right| cos\alpha = F_u + \left|\vec{F}_v\right| cos\gamma$ (1)

proyecciones sobre **w** $\Rightarrow$ $\left|\vec{F}\right| sen\alpha = \left|\vec{F}_v\right| sen\gamma$ (2)

De la Ec. (2) obtenemos: $\boxed{\left|\vec{F}_v\right| = \left|\vec{F}\right| (sen\alpha / sen\gamma)}$ (3)

Y reemplazando la Ec. (3) en la Ec. (1):

$$\left|\vec{F}\right| cos\alpha = F_u + \left|\vec{F}\right| (sen\alpha / sen\gamma) cos\gamma \Rightarrow F_u = \left|\vec{F}\right| cos\alpha - \left|\vec{F}\right| (sen\alpha / tg\gamma)$$

Finalmente:

$$\boxed{F_u = F cos\alpha (1 - tg\alpha / tg\gamma)}$$

Podemos así calcular las intensidades de las componentes vectoriales $\vec{F}_u$ y $\vec{F}_v$ a partir de los datos del problema.

1.4 - Fuerzas de vínculo

Hasta el momento hemos considerado fuerzas aplicadas sobre un cuerpo puntual, sin realizar consideraciones acerca de cómo se las aplica. En el mundo real esto debe hacerse por medio de determinados agentes mecánicos: en la Fig. 13 se ha esquematizado una grúa soportando una caja en equilibrio.

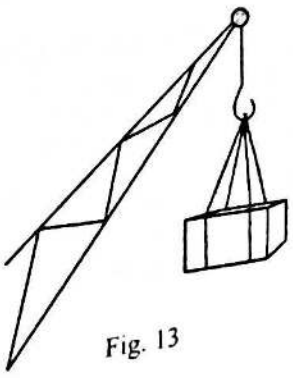


Fig. 13

El sistema de fuerzas aplicado sobre ella tiene suma de fuerzas nula. ¿Cómo identificamos a estas fuerzas? Una será el peso de caja, la fuerza de atracción gravitatoria terrestre. Las otras están aplicadas a través de las sogas que cuelgan del guinche. Consideremos ahora el guinche como nuestro cuerpo puntual. El sistema de fuerzas aplicando sobre el mismo está en equilibrio. ¿Cuáles son las fuerzas que lo componen? Por un lado las fuerzas aplicadas por las cuatro sogas que cuelgan de él y por el otro la fuerza del cable de acero de la grúa.

Entonces vemos cuáles son los agentes mecánicos que ejercen las fuerzas: se trata de sogas y cables (y también puede ser hilos, cuerdas, etc.). La característica más importante "y definitoria" de estos agentes desde el punto de vista de la estática es que transmiten fuerzas de *tracción* (o sea, que ponen tensa a la soga) a lo largo de su recta *exclusivamente.*

Los agentes mecánicos que permiten aplicar un sistema de fuerzas a un cuerpo puntual se denominan *vínculos*, dado que "vinculan" o restringen la posibilidad de movimiento de un cuerpo puntual u objeto *vinculado*.

El vínculo de una soga (o cable) limita el movimiento del objeto como si este fuera una esfera sujeta desde el centro ver Fig. 14.

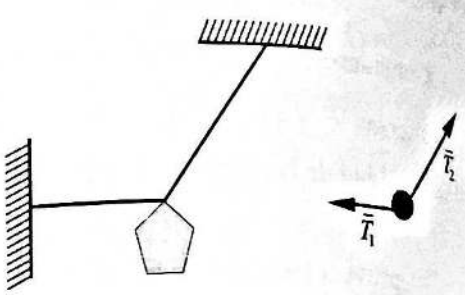


Fig. 14

Para resolver una situación estática con vínculos, reemplazamos al vínculo por la fuerza que realiza sobre el objeto en estudio. Para el caso del vínculo soga, la fuerza que ésta ejerce sobre el cuerpo puntual, tiene la dirección coincidente con la recta de la soga tensa y su efecto es tirar del cuerpo puntual.

A menudo se conoce esta *fuerza de vínculo* como *tensión* de la soga y se la designa $\vec{T}$ ó $\vec{F}_t$.

1.4.1 - Ejemplo de aplicación

Los extremos de un cable de 3m de largo se fijan a una viga horizontal en puntos separados 1,80 m. Se suspende un cuerpo de peso 22 kgf, del centro del cable. Calcular la tensión de cada sección del cable.

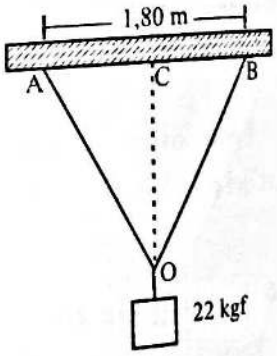


Fig. E3a

En este problema hay tres cables: las dos secciones que cuelgan de la viga y el cable del que cuelga un cuerpo.

Poniendo en evidencia todas las fuerzas de vínculo que actúan sobre el punto **O** de unión de cables queda el sistema de fuerzas de la figura. Note que los ángulos α que forman las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ con la vertical son iguales porque el cuerpo puntual se lo cuelga del centro del cable de 3 m.

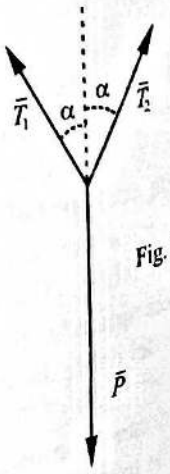


Fig. E3b

Por lo tanto **OA** = **OB** = 1,5 m. Junto con el dato **AB** = 1,8 m, podemos calcular el valor de α: el triángulo rectángulo **OCB** de la figura se cumple que:

$$sen\alpha = \frac{CB}{OB} = {}^{0,9\,m}\!/_{1,5\,m} = 0,6\,m \Rightarrow sen\alpha = 36^{\circ}\,52'12''$$

O también, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$OC = \sqrt{(OC)^2 - (CB)^2} = \sqrt{(1,5\ m)^2 - (0,9\,m)^2} = 1,2\,m$$

y entonces: $$cos\alpha = \frac{OC}{OB} = {}^{1,2\,m}\!/_{1,5\,m} = 0,8$$

Conocido α (o sus funciones trigonométricas $sen\alpha = 0{,}6$ y $cos\alpha = 0{,}8$) vamos ahora a averiguar las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$.

Por la simetría del problema parece que $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$.

Vamos a verificarlo determinado la condición de equilibrio $\vec{f} = 0$, por ejemplo con el método de las proyecciones.

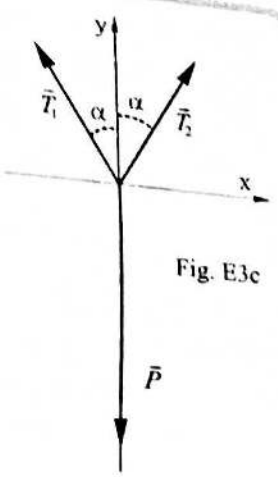


Fig. E3c

Tomamos un par de ejes horizontal y vertical y tenemos que para el equilibrio:

$$f_x = -|\vec{T}_1| sen\alpha + |\vec{T}_2| sen\alpha + 0 = 0$$

$$f_y = |\vec{T}_1| cos\alpha + |\vec{T}_2| cos\alpha - P = 0$$

De la primera ecuación, simplificando $sen\alpha$ llegamos a que: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}|$ y efectivamente las tensiones sobre cada mitad del cable son iguales.

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$2|\vec{T}| cos\alpha - |\vec{P}| = 0 \Rightarrow |\vec{T}| = \frac{|\vec{P}|}{2\ cos-} = {}^{22\ kgf}\!/_{(2.0,8)}$$

$$\boxed{|\vec{T}| = 13,75\ kgf}$$

El resultado hallado es el módulo de la tensión en cada cada uno de los cables.

1.5 - Resumen

Sistemas de fuerzas equivalentes: dos sistemas de fuerzas son equivalentes cuando producen los mismos efectos sobre el objeto al que se aplican. Como consecuencia pueden ser equilibradas por un mismo tercer sistema de fuerzas.

Equilibrante: Se llama equilibrante de un dado sistema de fuerzas al sistema compuesto por una única fuerza, capaz de equilibrar al cuerpo puntual.

Resultante: se llama resultante de un dado sistema de fuerzas al sistema compuesto por una única fuerza equivalente al sistema dado.

Condición de equilibrio de un cuerpo puntual: $\boxed{\vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0}$

Esta ecuación la podemos escribir en función de las componentes escalares:

$$\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = \sum_{i=1}^{n}(F_{ix}) = 0 \\ f_y = \sum_{i=1}^{n}(F_{iy}) = 0 \end{cases}$$

Si el cuerpo puntual no está en equilibrio la equilibrante $\vec{e}$, se puede calcular $\vec{e} = -\vec{f}'$, siendo:

$$\boxed{\vec{f}' = \sum_{i=1}^{n-1}\vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots + \vec{F}_{n-1}}$$

Vínculo o ligadura: Se llama vínculo o ligadura a cualquier restricción impuesta sobre el movimiento del cuerpo puntual.

2.1- Equilibrio de cuerpos extensos

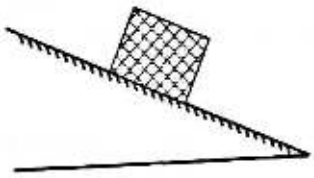
Hasta el momento hemos tratado con sistemas de fuerzas aplicadas sobre un *cuerpo puntual*, es decir un objeto de extensión idealmente nula. Por lo tanto tal objeto se puede representar por un punto y el sistema de fuerzas debe ser *concurrente* a ese punto. Este sistema es equivalente a una única fuerza, la *resultante*, bajo cuya acción el cuerpo puntual se acelera de acuerdo a la segunda ley de Newton, en la dirección y sentido de la fuerza resultante impulsora. Este movimiento suele denominarse *translación* de la partícula respecto de un sistema de referencia inercial arbitrario.

Otra situación se presenta cuando el objeto sobre el cual actúan las fuerzas es un *cuerpo extenso*. En tal caso los puntos de aplicación de las fuerzas del sistema generalmente no coinciden, por lo cual no tenemos fuerzas concurrentes.

Desde el punto de vista del movimiento posible del cuerpo, esta característica resulta en que, además de trasladarse por el espacio, un cuerpo extenso puede girar alrededor de un eje, como, por ejemplo, un tornillo que simultáneamente gira alrededor de su eje central y avanza a lo largo del mismo.

El movimiento más general de un cuerpo extenso puede siempre describirse como superposición de dos más sencillos, a saber:

Traslaciones: todos los puntos del cuerpo tienen en determinado instante la misma velocidad (vectorial). Esta velocidad puede variar en el tiempo, pero es la misma para todo punto del objeto, instante a instante. Por ejemplo, un bloque que desliza a lo largo de un plano inclinado.



Rotaciones: los puntos del cuerpo giran alrededor de un eje común que puede o no mantenerse fijo con el transcurrir del tiempo. El plato de un tocadiscos es un ejemplo de rotación.

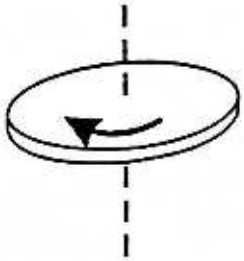


Fig. 1

Salvo cuando se trata de una translación a velocidad constante, o una rotación alrededor de cualquier eje con velocidad angular constante respecto de un sistema de referencia inercial, todo otro movimiento es acelerado y está asociado a la acción de un sistema de fuerzas exteriores aplicado sobre el cuerpo.

En la estática, nuestro objetivo es hallar las condiciones que debe cumplir tal sistema de fuerzas para producir equilibrio, o aceleración nula de todos los puntos del cuerpo (siempre respecto de un sistema de referencia inercial).

2.2 - Cuerpo rígido

Los cuerpos extensos reales experimentan deformaciones más o menos acentuadas, temporarias o permanentes, bajo la acción de fuerzas aplicadas. Una bandita de goma es un objeto evidentemente deformable, pero hasta un objeto tan duro como una barra de acero se puede "estirar" o "comprimir" hasta quebrarse si se aplican esfuerzos suficientemente intensos. Las deformaciones de los cuerpos constituyen una seria complicación en nuestro estudio introductorio de la estática, dado que el objeto modifica sus proporciones geométricas y las distancias entre sus partes, y no es fácil determinar cómo lo hace, debido a la complejidad de las interacciones internas entre sus átomos, responsables de la cohesión del conjunto. Entonces, frente a un objeto que se deforma, debemos tener en cuenta el sistema de fuerzas aplicadas o externas junto al conjunto de fuerzas de cohesión o internas cuyo gran número y comportamiento conjunto vuelven al problema de difícil solución.

Por esta razón vamos a introducir una hipótesis de trabajo que nos permitirá tratar con relativa sencillez gran cantidad de casos de importancia práctica donde las deformaciones (siempre presentes) son efectos despreciables por su pequeñez frente a los efectos globales de cambio del estado de movimiento del objeto en su conjunto: la ***hipótesis de cuerpo rígido***.

Un *cuerpo rígido* es un cuerpo ideal que no experimenta deformaciones bajo la acción de fuerzas aplicadas, o lo que es lo mismo la distancia entre dos cualquiera de sus puntos permanece invariante, independientemente de que actúen o no fuerzas sobre él, y de la intensidad de estas fuerzas aplicadas. El efecto de las fuerzas aplicadas será entonces únicamente modificar su estado de movimiento, es decir, producir aceleraciones.

Una consecuencia importante de la hipótesis de cuerpo rígido es que las fuerzas aplicadas se pueden trasladar a lo largo de su recta de acción. Esto significa que las fuerzas aplicadas pueden ser representadas por vectores, tal que su punto de aplicación puede ser cualquiera sobre su recta de acción, sin que se modifiquen los efectos que esa fuerza produce.

Así, es equivalente aplicar la fuerza $\vec{F}$ en **A** o en **B**.

Esta propiedad nos permite "trasladar" fuerzas a lo largo de sus rectas de acción sin modificar sus efectos sobre el cuerpo rígido, a fin de componer fuerzas aplicadas en distintos puntos. No importa si esta operación nos lleva a puntos que estén afuera del cuerpo. Hallada la composición de fuerzas, podemos volver a trasladar la resultante a lo largo de *su* recta de acción y aplicarla a cualquier punto de la misma *dentro* del cuerpo.

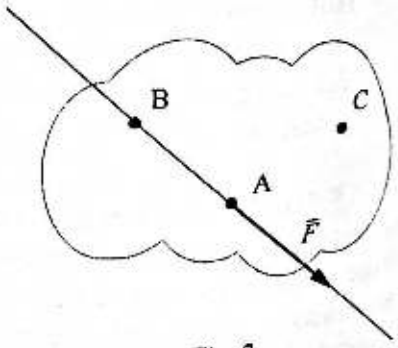


Fig. 2

¿Qué pasa si trasladamos la fuerza de un punto situado *fuera* de su recta de acción? Da por resultado un sistema de fuerzas *no* equivalente con el original, es decir, que no produce los mismos efectos. Podemos aclarar esto mediante un ejemplo.

Aplicamos dos fuerzas paralelas, de sentidos opuestos e igual módulo $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$ a dos puntos a dos puntos **A** y **B** del cuerpo que no se encuentren en la misma recta de acción.

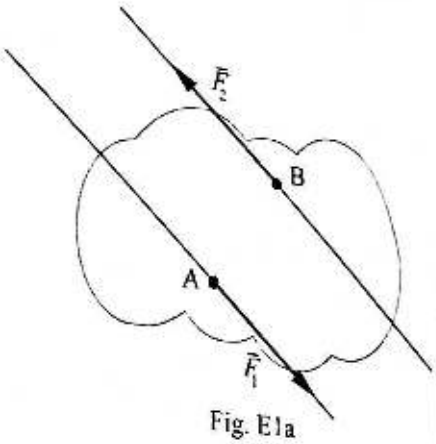


Fig. E1a

Supongamos que pudiéramos trasladar a $\vec{F}_2$ *fuera* de su recta de acción. Entonces el traslado de desde **B** a **A** no modificaría los efectos del sistema de fuerzas aplicado sobre el cuerpo rígido.

Efectuando el traslado observamos que sobre el punto **A** actúan dos fuerzas iguales y opuestas por lo que se anulan entre sí y el sistema resulta en equilibrio.

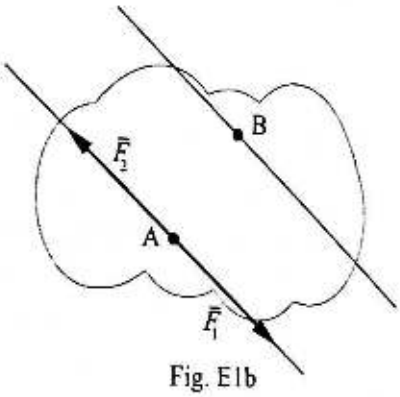


Fig. E1b

Sin embargo esto no es correcto. Por la acción del par de fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ el cuerpo, si estaba inicialmente quieto, girará aceleradamente. Es el principio de funcionamiento del tirabuzón. Aplicando un par de fuerzas iguales y opuestas sobre sus extremos, el tirabuzón gira si inicialmente no lo hacia, el sistema no se encuentra entonces en equilibrio porque el cuerpo gira aceleradamente, es decir, con velocidad de giro variable.

Concluimos entonces que el trasladar una fuerza fuera de su recta de acción produce un sistema de fuerzas no equivalente al original.

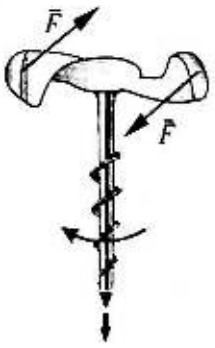


Fig. E1c

Observamos en este ejemplo que el traslado de $\vec{F}_2$ de **B** a **A** elimina el efecto de giro del sistema original $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Ocurre una situación análoga al querer trasladar $\vec{F}_1$ de **A** a **B**.

Sin embargo, podemos trasladar una fuerza fuera de su recta de acción si contabilizamos adecuadamente los efectos de giro que ello produce. Para hacerlo necesitamos usar una nueva magnitud física que describiremos a continuación.

2.3 - Momento de una fuerza. Cupla

Un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido puede producir los siguientes efectos: una aceleración de traslación, una aceleración de rotación o una combinación de ambas.

La aceleración de traslación está asociada al sistema de fuerzas aplicado al objeto independientemente de los puntos de aplicación de los mismos. La aceleración de rotación está asociada al sistema de fuerzas aplicado y a la posición de los puntos de aplicación de ellas.

Para contemplar ambas características introducimos una magnitud que llamaremos *momento de una fuerza respecto de un punto*.

Definimos a esta magnitud como el producto del módulo de la fuerza por la distancia entre el punto, elegido por ejemplo **O**, y la recta de acción de la fuerza. Note que distancia *siempre* se mide perpendicularmente a la recta de acción. Para los datos de la figura usamos la notación:

$$M_O = F \, . \, d$$

Observe que si el cuerpo está inicialmente en reposo, si invertimos el sentido de la fuerza $\vec{F}$ estamos invirtiendo el sentido del giro provocado: en el caso (a) $\vec{F}$ acelera al cuerpo en sentido antihorario alrededor de **O** mientras que en el caso (b) la aceleración es en sentido horario. Sin embargo, el producto $F \, . \, d$ es el mismo para ambos casos. Para poder distinguir ambos casos y conocer la aceleración de giro que produce una fuerza sobre el cuerpo adoptamos la siguiente *convención*: damos *signo positivo* al momento de una fuerza respecto a un punto cuando el giro tiene sentido antihorario y *signo negativo* cuando el giro es horario. Así para la Fig. 3a y la Fig. 3b [1]

Caso (a): sentido antihorario $\Rightarrow \quad M_O = F \, . \, d$
Caso (b): sentido horario $\Rightarrow \quad M_O = - F \, . \, d$

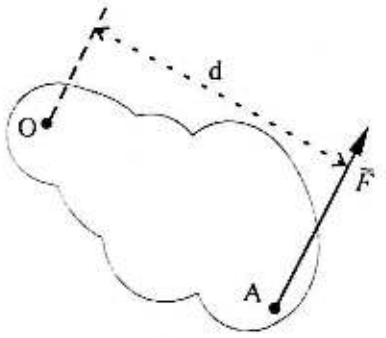


Fig. .3a

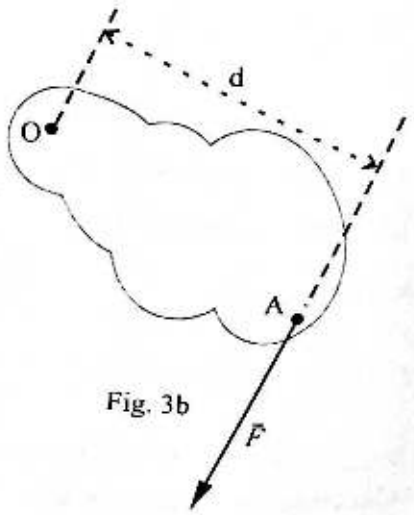


Fig. 3b

1 *Se ha supuesto reposo inicial. Si el cuerpo estuviera inicialmente girando hacia la derecha la aplicación de una cupla hacia la izquierda lo iría frenando. Hasta que ello ocurra, el sentido de la cupla es opuesto al sentido de giro.*

Al igual que las fuerzas, los momentos de un sistema de fuerzas se suman. En el caso de un sistema fuerzas coplanares aplicado a un cuerpo rígido, que es el que trataremos en este curso, los momentos de las distintas fuerzas se distinguen por su signo y se suman algebraicamente.

Vamos a aplicar esta propiedad al sistema de un par de fuerzas paralelas, de igual módulo y sentidos opuestos, que hemos venido analizando en relación a los posibles giros de un cuerpo rígido.

Sea un cuerpo inicialmente en reposo.

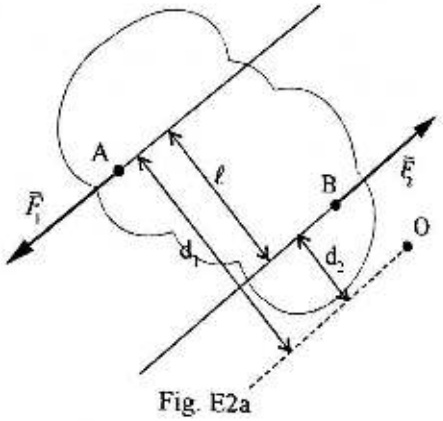


Fig. E2a

Tenemos $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$. La distancia entre las rectas de acción es l y las distancias de cada una de estas rectas al punto **O**, que elegimos arbitrariamente como *centro de momentos*, son d_1 y d_2, respectivamente. Note que hemos elegido el punto **O** fuera del cuerpo, y que las distancias se miden perpendicularmente a las rectas de acción.

El momento de $\vec{F}_1$ respecto de **O** es $M_{O1} = F \,.\, d_1$ (positivo porque su efecto es producir un giro antihorario) y el momento de $\vec{F}_2$ respecto de **O** es $M_{O2} = -F \,.\, d_2$ (negativo por que el efecto es producir un giro horario). El momento *total* del sistema de fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ respecto de **O** será entonces:

$$M_O = M_{O1} + M_{O2} = F \,.\, d_1 - F \,.\, d_2 = F\,(d_1 - d_2) \;\Rightarrow\; \boxed{M_O = F \,.\, l}$$

Ya que, como se ve en la figura, $d_1 - d_2 = l$, observe que esta igualdad no depende de la ubicación de O. Por ejemplo, si tomamos como centro de momentos el punto **A**, tenemos:

$M_{A1} = 0$ (la recta de pasa por **A**)

$M_{A2} = F \,.\, l \;\Rightarrow\; M_A = F \,.\, l$

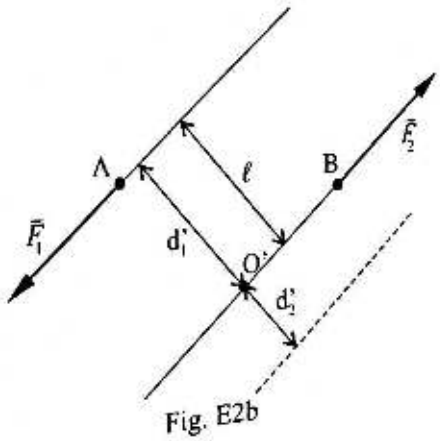


Fig. E2b

Y de la misma manera con **B**:

$M_{B1} = 0$ (la recta de pasa por B)

$M_{B2} = F \,.\, l \;\Rightarrow\; M_B = F \,.\, l$

Finalmente, si ubicamos el centro de momentos **O'** entre las rectas de acción tenemos:

$$M_{O'1} = F \,.\, d'_1 \quad , \quad M_{O'2} = F \,.\, d'_2 \quad \text{(ambos positivos)}$$

Luego: $M_{O'} = F \,.\, (d'_1 + d'_2) \;\Rightarrow\; \boxed{M_{O'} = F \,.\, l}$

Ya que $(d'_1 + d'_2) = l$

En resumen, éste es un resultado notable. El momento total de este peculiar sistema de fuerzas *no depende* del centro de momentos elegido. En otros sistemas, sí dependería.

Llamamos *cupla* (o también *par, torca o torque*) a este sistema de un par de fuerzas paralelas, de igual módulo, sentidos opuestos con rectas de acción distintas, cuya característica esencial o definitoria es que su momento total es independiente del centro de momentos elegido. Llamamos *momento de la cupla* a la cantidad $M = F \, . \, l$.

Observe que, por otra parte, la suma vectorial de fuerzas de una cupla es nula: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Entonces el cuerpo sobre el que actúa una cupla no se traslada, si inicialmente no lo hacía, sino que únicamente gira, si inicialmente no giraba. Volveremos sobre esto en la siguiente sección. Viceversa, un sistema cualquiera de fuerzas aplicadas al cuerpo cuyo único efecto sea únicamente un giro acelerado sin traslación acelerada es equivalente a una cupla del mismo momento que la suma de momentos de las fuerzas del sistema, con respecto a cualquier centro de momentos.

Veamos algunas propiedades del sistema de fuerzas que llamamos cupla.

Conclusiones a modo de diálogo:

- ¿Son todas las posibles cuplas equivalentes?
- Evidentemente no. Su momento depende de la intensidad F de las fuerzas que la componen y de la distancia l entre sus rectas de acción, y los efectos que producen están ligados al momento. Así, si yo no puedo girar con las manos una tuerca oxidada porque el momento que aplico es insuficiente para romper la capa de óxido que la atasca al tornillo, lo consigo fácilmente usando una llave apropiada, la que me permite aplicar un momento mayor.
- Bien. Supongamos que F y l son las mismas cantidades para dos cuplas. Entonces el momento $M = F \, . \, l$ es el mismo para ambas.
- No. Depende del *sentido* de giro del cuerpo rígido sobre el que actúa la cupla. Observemos la Fig. 3a y la Fig 3b, se trata del mismo cuerpo, fuerzas de igual intensidad aplicadas sobre los mismos puntos, de la misma dirección y separadas en la misma distancia. Sin embargo, en el caso (a), el efecto de la cupla es acelerar el cuerpo en sentido antihorario, en el caso (b) la aceleración de giro tiene sentido horario. Recordando la convención de signos para los momentos, en el caso (a) adoptemos signo positivo y en el caso (b) signo negativo para el momento de las cuplas:

(a) $\Rightarrow \quad M = F \, . \, l$

(b) $\Rightarrow \quad M' = - F \, . \, l$

Y distinguimos cuplas de momentos de igual intensidad $M = F \, . \, l$ por su signo de acuerdo al sentido de giro que provocan.

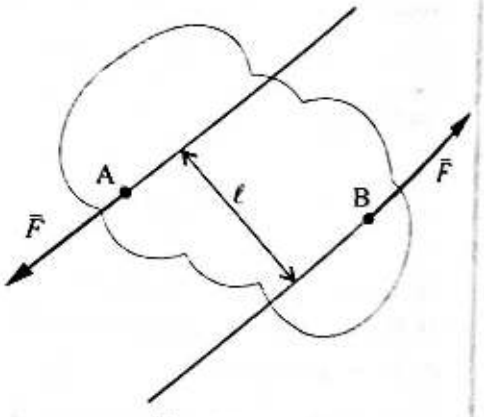


Fig. E3a

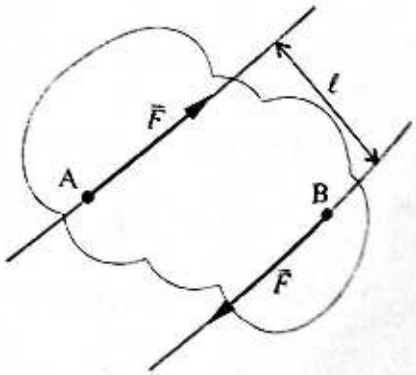


Fig. E3b

- Entonces los efectos de una cupla están definidos por la intensidad y el signo de su momento, de modo que, por ejemplo, una cupla de momento $F \, . \, l$ es equivalente a otra cupla de momento $F' \, . \, l'$, con $F' = F/K$ y $l' = K \, . \, l$, siendo K cualquier número, de modo que $F' \, . \, l' = F \, . \, l$ siempre que los dos momentos sean de igual signo.
- Así es.
- Hasta luego.

Sigamos dialogando:

- ¿Y qué podemos decir de las rectas de acción de las fuerzas que componen la cupla?
Por ejemplo en la Fig. 4a y en la Fig. 4b, tenemos cuplas de igual intensidad y signo, es decir, en ambos casos $M = F \, . \, d$, pero están aplicadas a puntos distintos y sus rectas de acción (paralelas para fuerzas de la misma cupla) son también distintas. ¿Son equivalentes o no?
- ¿Cuándo son equivalentes dos sistemas de fuerzas?
- Cuando aplicadas al mismo cuerpo rígido producen los mismos efectos.
- Y ¿cuál es el efecto de una cupla sobre un cuerpo rígido?
- Producir una aceleración angular.
- Bien. Imaginemos, por ejemplo que el punto **O** del cuerpo esté fijo, de modo que el único movimiento posible sea de rotación alrededor de él. Como el momento de un cupla no depende de la elección del centro de momentos:

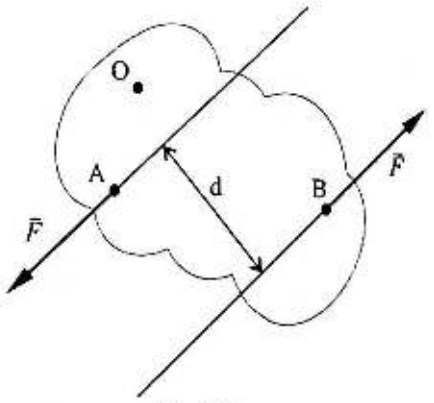


Fig. E4a

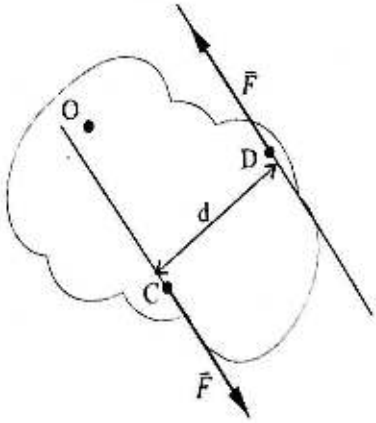


Fig. E4b

$$\text{Caso (a)} \quad \Rightarrow \quad M_O = F \, . \, d$$
$$\text{Caso (b)} \quad \Rightarrow \quad M_O = F \, . \, d$$

Si observáramos únicamente el giro del cuerpo alrededor de O y no supiéramos cuál es el sistema de fuerzas aplicado. ¿Cuál de los dos casos elegiríamos como sistema real que causa el efecto?
- No parece haber posibilidad de distinción...
- **No. No la hay**. Para cuerpos rígidos, los dos sistemas son indistinguibles. Producen iguales efectos.
De una cupla sólo podemos conocer -y eso nos basta para el análisis- su momento (con intensidad y signo). Cuál sea la dirección de las rectas de acción de sus fuerzas y en que puntos del cuerpo se hallen aplicadas es irrelevante, ya que estas características no varían sus efectos.

Todas las cuplas que podamos imaginar con igual momento son entonces equivalentes.

2.4 - Condiciones de equilibrio del cuerpo rígido

Estamos ahora en condiciones de establecer condiciones generales para el equilibrio de un cuerpo rígido bajo la acción de un sistema de fuerzas.

El equilibrio del cuerpo rígido implica simultáneamente:

a) Que la suma (vectorial) de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo sea nula. Esta condición ya la encontramos en la estática del cuerpo puntual.
b) Que la suma (algebraica) de los momentos de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo *respecto de un punto* cualquiera sea nula.

Estas dos condiciones son necesarias y suficientes para el equilibrio del cuerpo rígido. Son *necesarias* porque si no se cumplen no hay equilibrio y son *suficientes* porque su cumplimiento asegura el equilibrio. Desde el punto de vista matemático, el equilibrio del cuerpo rígido está definido por las ecuaciones

$$\vec{f} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases} \qquad M_O = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_{O,\vec{F}_i} = 0$$

Donde los ejes x e y son cualesquiera y se eligen de acuerdo a la conveniencia matemática de simplificar los cálculos y el centro de momentos **O** es también arbitrario. Observe que se trata de tres ecuaciones, lo que lleva a pensar que el problema debería tener tres incógnitas. Hablaremos más de esto en una sección posterior.

Veamos como operar con estas ecuaciones en algunos ejemplos:

Una barra de longitud l y peso $\vec{P}$ se halla en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas indicadas en la Fig. E5a. Determinar $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

Antes de plantear ecuaciones analicemos cualitativamente la situación, lo que siempre es conveniente porque muchas veces permite simplificar la solución matemática y evitar posibles errores que surjan de la aplicación ciega de las ecuaciones.

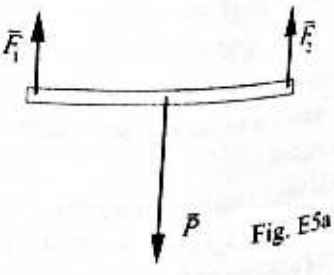


Fig. E5a

Convencionalmente, situamos la fuerza peso vertical, hacia abajo y (según justificaremos más adelante) en el centro de la barra. Intuitivamente, las fuerzas aplicadas sobre los extremos deben "apuntar" hacia arriba para contrarrestar la acción del peso, como se indica en la figura, y debido a la simetría de la disposición deberían ser iguales y entonces cada una tendría una intensidad $P/2$.

Veamos qué resultado tenemos aplicando las condiciones de equilibrio. Para ello necesitamos definir un sistema de ejes y un centro de momentos. Como trataremos con fuerzas verticales nos conviene, para simplificar el cálculo de las proyecciones, usar un eje vertical y uno horizontal.

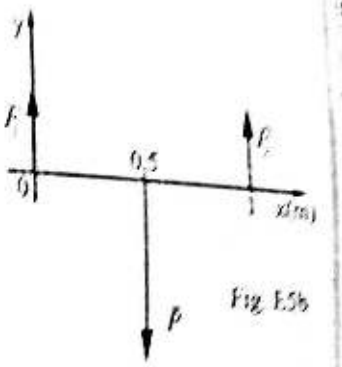


Fig. E5b

Tomemos el origen de coordenadas **O** como centro de momentos. Como el momento de una fuerza respecto a un punto es proporcional a la distancia de la recta de acción de la fuerza al punto, nos conviene tomar el centro de momentos, que puede ser cualquier punto, sobre la recta de acción de una de las fuerzas del sistema, con lo que simplificamos el cálculo. Tomamos entonces, por ejemplo **O** en el extremo izquierdo de la barra.

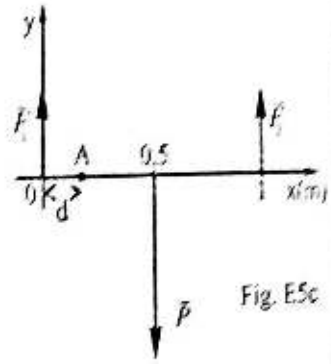


Fig. E5c

Planteamos ahora las condiciones de equilibrio:

$$\vec{f}=0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0 \end{cases} \qquad M_O=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_{O,i}=0$$

$\sum_{i=1}^{3} F_{ix}=0$ Es inmediata, ya que no hay proyecciones de fuerzas del sistema sobre el eje x.

$$\sum_{i=1}^{3} F_{iy}=F_1+F_2-P=0 \Rightarrow \boxed{F_1+F_2=P} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{3} M_{O_i}=0-P\left(\frac{l}{2}\right)+F_2\,l=0 \qquad (2)$$

Observe los signos de los momentos. $M_{F1}=0$ por la selección del centro de momentos.

Luego de la Ec. (2) despejamos F_2: $F_2\,l=P\,\frac{l}{2} \Rightarrow \boxed{F_2=\frac{P}{2}}$ (3)

Y despejando F_1 de la Ec. (1) y reemplazando F_2 de la Ec. (3) resulta:

$$F_1=P-F_2 \Rightarrow F_1=P-\frac{P}{2} \Rightarrow \boxed{F_1=\frac{P}{2}} \qquad (4)$$

De la Ec (3) y de la Ec. (4) resulta: $F_1=F_2=P/2$ que es el mismo resultado al que habíamos llegado con nuestro análisis intuitivo. Pruebe repetir el cálculo eligiendo otro centro de momentos, por ejemplo el punto **A** que está a una distancia d de **O**.

Todo esto está muy bien, pero aquí partimos conociendo el sentido de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ porque el análisis intuitivo previo es simple en este caso. Pero habrá otros casos más complejos donde

ese sentido no puede definirse previamente en forma simple. ¿Cómo se procede en tales casos?

- Bien. Supongamos que sólo conocemos la dirección (vertical) de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ pero no su sentido.

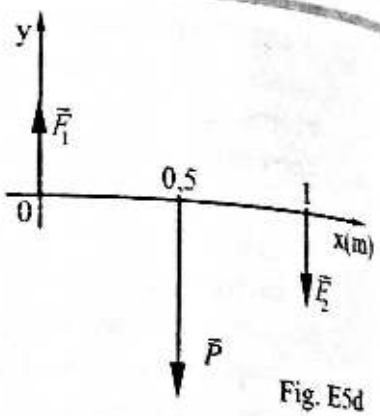


Fig. E5d

Como en nuestra ignorancia ambos sentidos son igualmente posibles, elijamos *arbitrariamente* uno hacia arriba y otro hacia abajo, como se indica en la figura, y repitamos el cálculo:

$\sum_{i=1}^{3} F_{ix} = 0$ como antes, esta ecuación no nos aporta información.

$$\sum_{i=1}^{3} F_{iy} = F_1 - F_2 - P = 0 \Rightarrow \boxed{F_1 - F_2 = P}$$

Observemos que en esta ecuación las cantidades F_1 y F_2 son positivas. El signo de las proyecciones ya se ha tenido en cuenta.

$$\sum_{i=1}^{3} M_{Oi} = 0 - P\left(\frac{l}{2}\right) - F_2 l = 0 \Rightarrow \boxed{F_2 = -\frac{P}{2}}$$

Y aquí ha saltado la liebre. Observe que F_2 es negativa, ya que P es positivo y nuestra suposición original, F_2 positiva con sentido hacia abajo era falsa. Por lo tanto F_2 debe "apuntar" hacia arriba.

2.5 - Cables y Barras. Vínculos

Hemos visto en el tratamiento cuerpos puntuales que un cable (o hilo, o soga, o cuerda) establecía un vínculo al restringir sus movimientos posibles. Un cable actúa de vínculo únicamente cuando está tenso, y su dirección es de tracción, o sea de "tirar" desde sus extremos.

No se puede "empujar" objetos con un cable. La situación del primer dibujo de la Fig. 4 es impensable porque el cable no es estrictamente un cuerpo rígido. Sin embargo, si se lo reemplaza por una barra, supuestamente rígida, el "empuje" es posible. La barra actúa nuevamente como "transmisor" de fuerzas entre sus extremos.

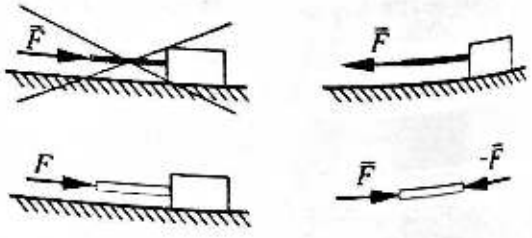


Fig. 4

El bloque se acelera a la derecha bajo la acción de $\vec{F}$. Por la tercera ley, la barra recibe del bloque una reacción ($-\vec{F}$). Observe el sistema de fuerzas que actúan sobre la barra, cuyo efecto es comprimirla. Si el punto de contacto entre barra y bloque, y en tal caso el sistema de fuerzas sobre ella es similar al caso del cable, son fuerzas que la estiran, la traccionan. Por su rigidez, entonces, la barra admite esfuerzos de tracción o compresión. El cable, únicamente esfuerzos de tracción. En ambos casos, los esfuerzos se "transmiten" solamente a lo largo, hasta este momento de nuestro análisis.

Podemos entonces resumir estas propiedades de barras y cables en la siguiente figura; note que las barras en cuestión están articuladas, es decir, presentan un pivote alrededor del cual pueden girar.

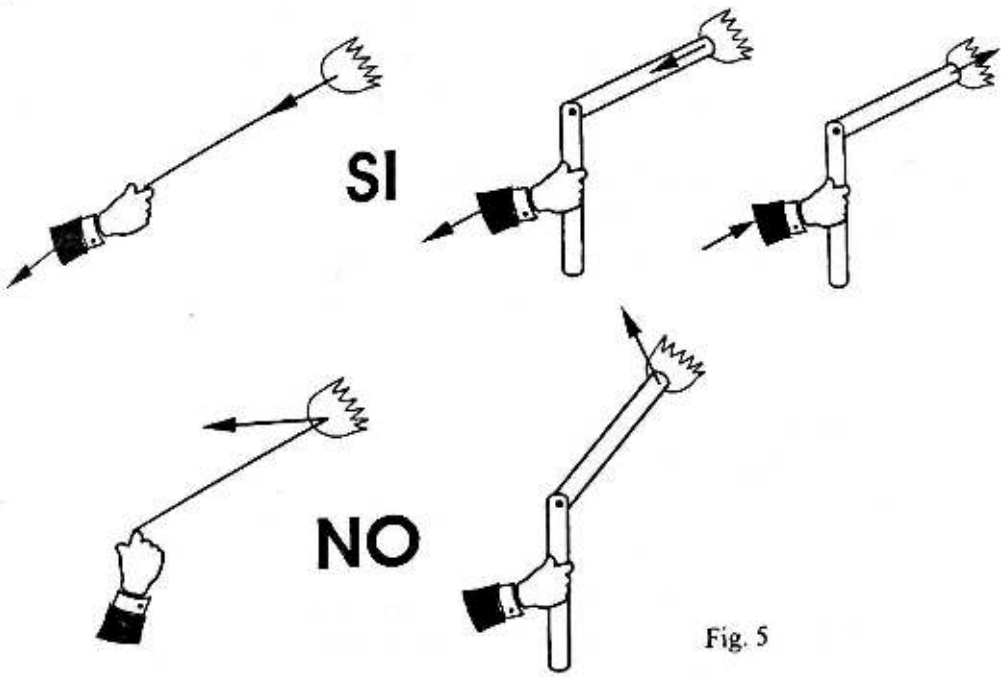


Fig. 5

Sin embargo, la condición de rigidez de las barras nos da más posibilidades, como por ejemplo:

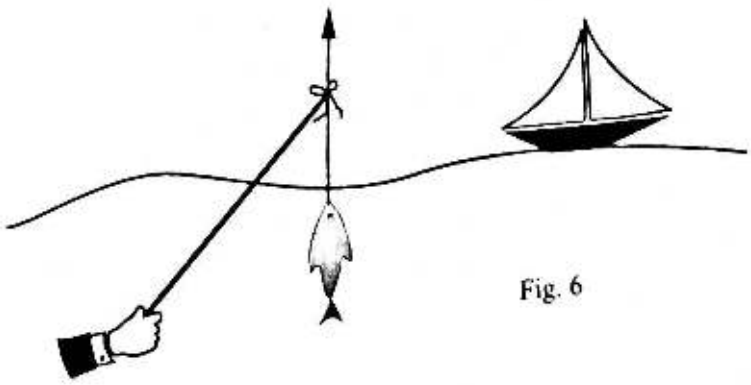


Fig. 6

Pero observe que en este caso la caña no es una barra articulada, sino que está unida (más o menos) rígidamente a la mano. Decimos que está "empotrada" en la mano.

Si se reemplaza este empotramiento con una articulación, otra vez sólo es posible tirar o empujar.

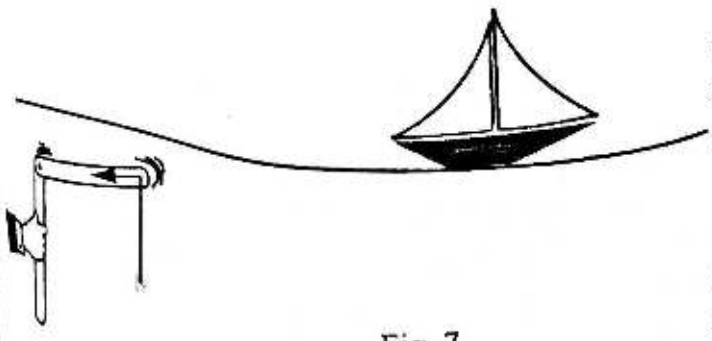


Fig. 7

Pero determinar las posibilidades de movimiento es conveniente clasificar de alguna forma los tipos de vínculos entre cuerpos rígidos.

Note que la barra es un tipo particular de cuerpo rígido, en principio, cualquier cuerpo rígido se comporta como una barra.

Bajo la acción de un sistema de fuerzas plano, un cuerpo rígido plano y obligado a permanecer en su plano, tiene únicamente tres posibilidades de movimiento independientes: dos traslaciones sobre direcciones perpendiculares en el plano y el giro alrededor de un punto del plano. Cualquier movimiento del cuerpo sobre el plano puede pensarse como una combinación de estas tres posibilidades.

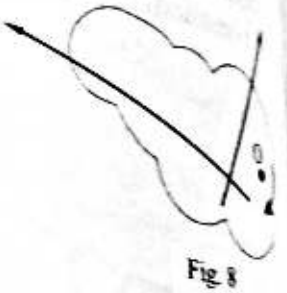


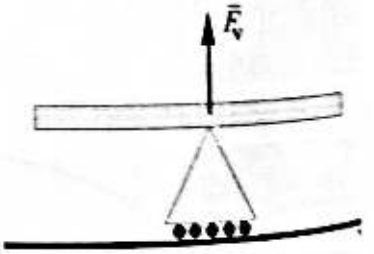
Fig. 8

Recordemos que las ecuaciones que surgían de las condiciones de equilibrio eran también tres: la sumatoria de las componentes escaleres según ejes perpendiculares nula -condición ligada al equilibrio de traslación- y la sumatoria de los momentos de las fuerzas respecto de cualquier punto del plano nulo - condición de equilibrio de rotación.

Cada una de las tres posibilidades de movimiento del cuerpo rígido se denomina grado de *libertad*. Decimos entonces que, *en el plano*, un cuerpo rígido tiene ***tres grados de libertad***. Una condición de equilibrio restringe, entonces, un grado de libertad del cuerpo.

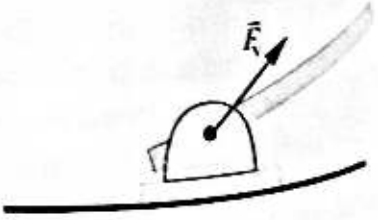
En la práctica, para restringir las posibilidades de movimiento de un cuerpo rígido, es necesario unirlo a otros cuerpos rígidos por medio de dispositivos que llamamos *vínculos*. Las fuerzas y momentos que estos dispositivos aplican al cuerpo rígido se llaman *fuerzas o pares de vínculo*. Podemos clasificar los vínculos de acuerdo al número de grados de libertad que restringen al posible movimiento del cuerpo rígido.

Así, el caso más simple es el de *apoyo o apoyo móvil*, que restringe únicamente un grado de libertad: el movimiento en la dirección perpendicular al apoyo (en la figura, traslación según la dirección vertical). La fuerza de vínculo $\vec{F}_v$ es una fuerza en esa dirección, que anula toda otra posible fuerza aplicada al cuerpo cuyo efecto sea tender a trasladarlo en esa dirección.



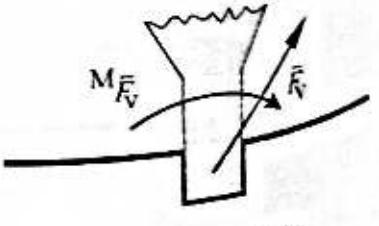
Apoyo móvil

Otro caso es el vínculo llamado *articulación o apoyo fijo*. Se trata de un pivote que permite al cuerpo rotar alrededor de él pero no trasladarse. Se restringen así dos grados de libertad y queda únicamente la posibilidad de giro. La fuerza de vínculo es una fuerza de cualquier dirección, cuyas componentes sobre dos direcciones perpendiculares anulan las posibles fuerzas aplicadas sobre el cuerpo que tienden a trasladarlo en esas direcciones.



Apoyo fijo

Finalmente, tenemos el vínculo llamado *empotramiento*. Consiste en una unión rígida que restringe los tres grados de libertad del cuerpo. Un cuerpo rígido empotrado no puede moverse. La acción del vínculo en este caso es una fuerza de cualquier dirección, que anula la posibilidad de traslación, y un momento *(momento de empotramiento)* que anula la posibilidad de rotación.



Empotramiento

Fig. 9

Desde el punto de vista del equilibrio del cuerpo rígido, las acciones de vínculo pueden pensarse como fuerzas equilibrantes del sistema aplicado. Por ejemplo:

- En el *apoyo* (móvil) la fuerza de vínculo equilibra a la componente de la resultante sobre la dirección del apoyo.
- En la *articulación* la fuerza de vínculo es la equilibrante del sistema de fuerzas aplicadas.
- En el *empotramiento* la fuerza de vínculo y el momento de empotramiento equilibran al sistema de fuerzas aplicadas.

Podemos aplicar varios vínculos de distinto tipo para lograr un cuerpo rígido en equilibrio bajo diversas solicitaciones externas. Pero puede suceder que el número de grados de libertad que estos vínculos restringen sea menor, igual o mayor que tres, el número de grados de libertad del cuerpo rígido *en el plano*. Observemos que para la determinación de las acciones de vínculos disponemos de tres ecuaciones (las condiciones de equilibrio) y un número menor o mayor de incógnitas nos creará dificultades matemáticas.

De acuerdo al número de grados de libertad no restringidos, los cuerpos rígidos vinculados se clasifican de la siguiente manera:

Isostáticos: hay tres grados de libertad restringidos. El cuerpo no puede moverse y hay tantas ecuaciones como incógnitas. En este curso trataremos exclusivamente con sistemas isostáticos. Como ejemplos, supongamos una barra apoyada sobre tres apoyos (móviles), o la misma barra apoyada en un punto y articulada en un extremo.

Los tres apoyos no pueden ser colineales

Note los símbolos que utilizaremos para diferenciar los tres tipos de vínculos:

Apoyo móvil.

Apoyo fijo o articulación.

Empotramiento.

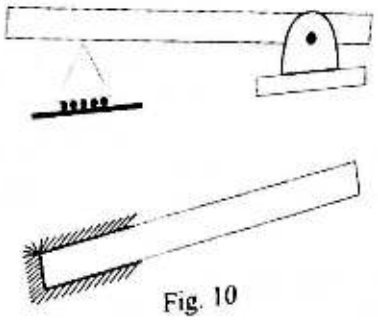


Fig. 10

Hipostáticos: hay grados de libertad no restringidos. El sistema alcanza el equilibrio en forma condicionada, es decir, hay un conjunto restringido de sistemas de fuerzas aplicadas para los cuales se logra el equilibrio. Por ejemplo considere una barra horizontal apoyada en dos puntos. Si se aplica una fuerza horizontal la barra se acelera en la dirección de la fuerza y los apoyos no pueden equilibrar esa acción. Otro ejemplo: una barra pivoteada o articulada en un extremo. La barra puede acelerarse alrededor del extremo fijo y lo hará a causa de su propio peso.

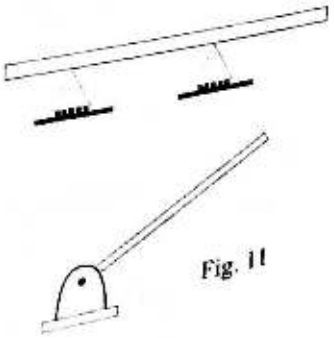


Fig. 11

Hiperestáticos: hay más restricciones que grados de libertad. El sistema se hallará en equilibrio pero son necesarias técnicas especiales fuera del alcance de este curso, para determinar las acciones de vínculo. La mayoría de las construcciones de la ingeniería son sistemas hiperestáticos. Una mesa común es un ejemplo. La mesa apoya en las cuatro patas. Hay cuatro apoyos móviles. Uno parecería redundante, pero, pruebe quitar una pata...

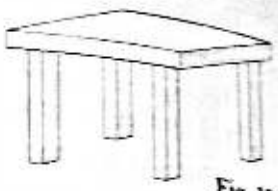


Fig. 12

Como hemos dicho en este curso trataremos únicamente con sistemas isostáticos. Veremos a continuación algunos ejemplos a fin de aclarar ideas.

Una barra de 80 cm de longitud y 30 kgf de peso se halla articulada en un extremo. a) Hallar el valor de la fuerza que hay que aplicar en el otro extremo que permite el equilibrio sí:

1) su dirección es vertical.
2) su dirección es horizontal,

para mantener a la barra inclinada en $\alpha = 60°$ como se indica en la Fig.E6a.
b) En ambos casos determine la fuerza de vínculo en el punto **A**.

La articulación en **A** sólo permite que la barra gire alrededor de ese punto. La fuerza de vínculo equilibra a la suma vectorial del sistema de fuerzas aplicadas $\vec{F}$ y $\vec{P}$. Para equilibrar el momento de rotación alrededor de **A** producido por el peso, se coloca la fuerza $\vec{F}$. Su dirección es dato del problema, por lo que sólo es necesario hallar su intensidad y sentido. Como el grado de libertad a restringir es la posible rotación alrededor de **A**, para determinar $\vec{F}$ basta con la condición de equilibrio de momentos respecto de **A**. Observe que con esta elección del centro de momentos no necesitamos, para ese cálculo, conocer la fuerza de vínculo en **A** ya que su momento se anula.

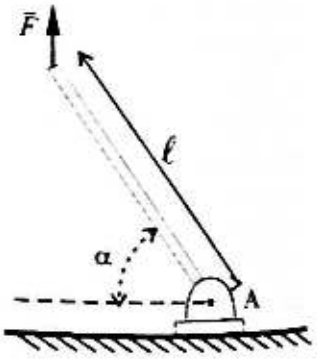


Fig. E6a

Analicemos los dos casos por separado:

a.1) *F* vertical

De la figura se observe que las distancias desde **A** a las rectas de acción de las fuerzas son:

$d_F = l \cos \alpha \qquad d_P = dF/2$

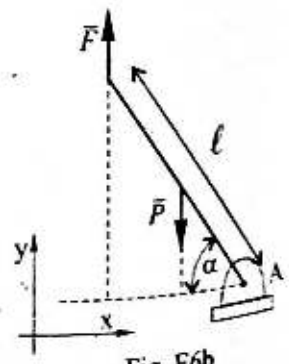


Fig. E6b

Ya que el peso se halla en el centro geométrico de la barra.
Luego:

$$\sum_{i=1}^{2} M_{A,i} = -F\, d_F + P\, d_P = 0 \;\Rightarrow\; P(d_F/2) - F\, d_F = 0$$

y se tiene: $F = P/2 = 15$ kgf y sentido hacia arriba. Observe que no importa la longitud de la barra ni su inclinación, porque P y F son paralelas y las distancias al centro de rotación cumplirán siempre la relación $d_F = 2\, d_P$.

b.1) Para calcular ahora la fuerza de vínculo en A planteamos las condiciones de equilibrio:

$$\sum_{i=1}^{3} F_{ix} = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{3} F_{iy} = 0$$

Observe que el sistema de fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{P}$ aplicadas no tiene componente horizontal. Por lo tanto tampoco la tendrá la fuerza de vínculo en A.

$\sum F_y = F - P + F_{Ay} = 0$ (suponemos que F_{Ay} tiene sentido positivo arbitrariamente).

Luego: $F_{Ay} = P - F = P/2 = 15\ kgf$

Y el signo positivo del resultado nos indica que la suposición del sentido de F_{Ay} era correcta. Finalmente:

$$\boxed{\vec{F} = 15\ kgf\ \vec{j} \quad \text{y} \quad \vec{F}_{Ay} = 15\ kgf\ \vec{j}}$$

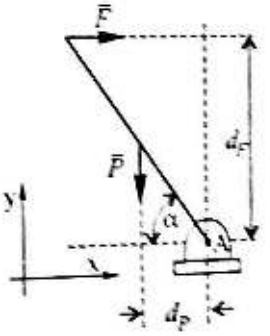


Fig. Esc

a.2) *F* horizontal

Intuitivamente $\vec{F}$ debe estar dirigida hacia la derecha para contrarrestar la tendencia al giro causada por el peso. Las distancias desde A a las rectas de acción de las fuerzas son ahora:

$d_F = l\ sen\ \alpha$ $\qquad$ $d_P = (l/2)\cos\alpha$

Y de la condición de equilibro de rotación resulta:

$$\sum M_A = P\, d_P - F\, d_F = 0 \Rightarrow P(l/2)\cos\alpha - F\, l\, sen\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{F = P/(2tg\alpha)}$$

Con $P = 30$ kgf y $\alpha = 60°$ tenemos $\boxed{F \approx 8{,}66 \text{ kgf}}$ hacia la derecha, como habíamos supuesto.

b.2) La fuerza de vínculo tiene ahora componentes horizontal y vertical, porque así tiene la suma vectorial de fuerzas del sistema $\vec{F}$ y $\vec{P}$. Es también "intuitivo" que F_{Ax} tenga sentido hacia la izquierda, para equilibrar a $\vec{F}$ y F_{Ay} hacia arriba para equilibrar a $\vec{P}$. En realidad, sin necesidad de seguir todo el formalismo de las ecuaciones, podemos escribir:

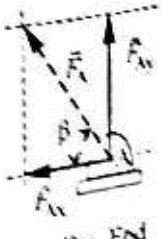


Fig. Esd

$$F_{Ax} = -F \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = -8{,}66\ kgf$$
$$F_{Ay} = P \quad \Rightarrow \quad F_{Ay} = 30\ kgf$$

De donde se obtiene:

$$\boxed{F_A = 31{,}225 \text{ kgf} \quad \text{y} \quad \beta = 73°\ 54'}$$

Observe que la dirección de $\vec{F}_A$ no coincide con la dirección de la barra, y en general, no hay razón para que lo haga cuando el vínculo es una articulación.

Determinar la acción de vínculo en el soporte del mástil. El mástil mide 1,8 m y pesa 10 kgf. La bandera pesa 1 kgf y considerar que la recta de acción de su peso pasa por el extremo del mástil.

El mástil se encuentra empotrado al soporte. La acción de vínculo consiste en una fuerza vertical $\vec{F}_V$ (porque la resultante del sistema de fuerzas aplicadas $\left(\vec{P}_b + \vec{P}_m\right)$ no tiene componente en la dirección horizontal) y hacia arriba, y un momento de empotramiento de sentido antihorario. Los sentidos de $\vec{F}_V$ y $M_{\vec{F}_V}$ resultan de su condición de equilibrantes del sistema aplicado. Las condiciones de equilibrio nos llevan a:

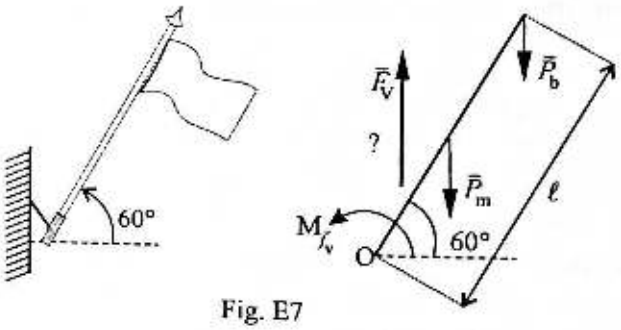


Fig. E7

$$\boxed{F_V = P_b + P_m = 11\ kgf}$$

$$\sum M_{Oi} = 0 \Rightarrow M_{\vec{F}v} - P_m (l/2)\cos 60° - P_b\, l \cos 60° = 0$$

$$M_{\vec{F}v} = (P_b + P_m/2)\, l \cos 60°$$

$$\boxed{M_{\vec{F}v} = 5{,}4\ kgf\ m}$$

Hasta el momento, al hablar del peso de un cuerpo extenso lo hemos supuesto como una única fuerza ubicada en un único punto, que suponíamos en el centro geométrico del cuerpo, como si la Tierra realizara una única fuerza de atracción gravitatoria sobre él.

En realidad, un cuerpo extenso lo podemos considerar formado por un conjunto de partículas y la Tierra atrae a cada una de ellas a través de la interacción gravitatoria. Tenemos entonces que el cuerpo está sometido a la acción de un gran número de pequeñas fuerzas elementales, y es la resultante de este sistema de fuerzas lo que llamamos peso. Podemos medir la intensidad de esta resultante-peso colgando el cuerpo de un dinamómetro y observando la lectura en la escala. Su dirección y sentido serán hacia el centro de la Tierra y nos queda determinar su punto de aplicación para definirla por completo.

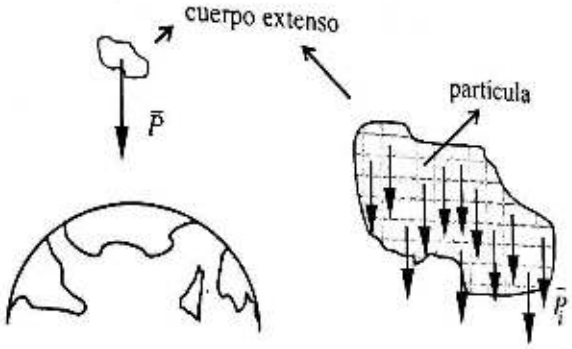


Fig. 13

Para determinarlo podemos colgar el cuerpo de distintos puntos y observar la recta de acción resultante de la resultante-peso en cada caso. Observamos que todas esas rectas de acción se cruzan en un único punto cualquiera sea la posición del cuerpo. Ese punto es entonces el punto de aplicación del peso y se conoce como *centro de gravedad del cuerpo.*

Cada vez que lo colgamos, el cuerpo se dispondrá en la posición para la cual la fuerza que ejerce la soga y el peso se hallen en la misma recta de acción, para lograr el equilibrio.

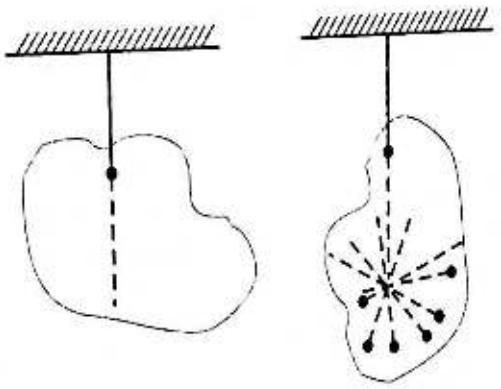


Fig. 14

Generalmente los objetos de interés práctico son de tamaño muy pequeño frente al tamaño terrestre, de modo que las fuerzas elementales de atracción gravitatoria sobre las partículas del objeto son paralelas y de igual valor (para partículas idénticas) dentro de un margen de error despreciable. En tal caso la experiencia de colgar el cuerpo de distintos puntos permite hallar el centro de gravedad.

Sin embargo, si las dimensiones del objeto son tales que las fuerzas de atracción gravitatoria (que dependen del cuadrado de la distancia al centro terrestre) elementales *no* son iguales, el centro de gravedad cambiará de punto con la posición del cuerpo y para cada posición habrá, generalmente, un centro de gravedad distinto.

Por ejemplo, ver Fig. 15, sea una barra rígida de masa despreciable y de enorme longitud, en la que desde los extremos se sujentan dos esferas. Si tenemos en cuenta que la atracción gravitatoria disminuye con el cuadrado de la distancia, en el caso (a) el sistema peso puede equilibrarse con una

fuerza aplicada en **A**, porque las esferas están equidistantes del centro de la Tierra y las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son simétricas y de igual intensidad.

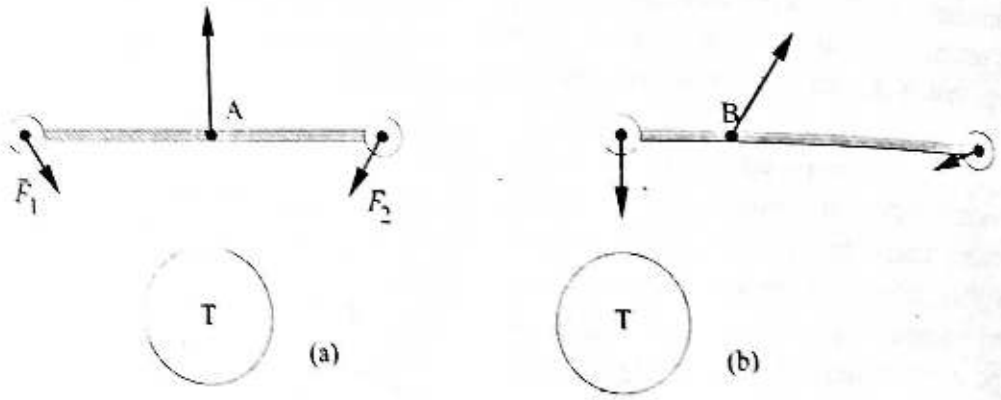


Fig. 15

En cambio, el mismo cuerpo colocado en la posición representada en (b) sólo puede equilibrarse -si se desea hacerlo con una fuerza única- aplicando una fuerza en **B**. ¡Se ha desplazado el centro de gravedad!

En adelante, cuando hablemos de centro de gravedad, será para cuerpos de pequeña extensión frente al tamaño terrestre, lo que, por otra parte, es lo usual.

¿Cómo determinar el centro de gravedad de un cuerpo extenso? Si el cuerpo tiene forma irregular, la única manera simple de hacerlo es colgando al cuerpo desde dos puntos distintos y marcar el punto de cruce de las líneas de plomada obtenidas, o sea, las líneas formadas por la cuerda de la cual se cuelga al cuerpo al quedar en equilibrio. Cuando el cuerpo tiene una forma geométrica regular es más preciso usar un método matemático, dado que el método experimental es bastante grosero.

En este caso, el cuerpo tiene un *centro geométrico* o centro de simetría, de forma tal que si $\vec{r}$ es la posición de una partícula del cuerpo respecto de ese centro, existe otra partícula en la posición $-\vec{r}$, y podemos agrupar las partículas de a pares alrededor del centro geométrico para constituir el cuerpo.

También podemos hacer esto para sumar las fuerzas pesos elementales sobre cada partícula. Para un par de partículas simétricas respecto del centro geométrico **O**, la resultante $\vec{f}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ pasa por **O** (compruébelo tomando momentos respecto de **A**, por ejemplo, y usando la relación de equivalencia entre $\vec{f}'$ y las fuerzas 1 y 2: $M_{A\vec{f}'} = M_{A(\vec{F}_1+\vec{F}_2)}$) y repitiendo este procedimiento para cada par de partículas que forma el cuerpo todas las resultantes parciales pasan por **O**.

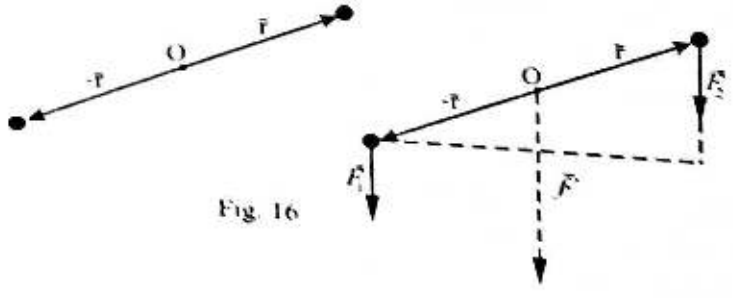
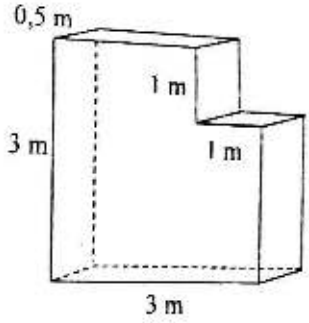


Fig. 16

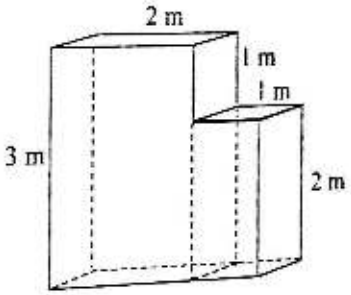
Resulta entonces que el peso del cuerpo en su conjunto pasa por el centro geométrico, que es entonces *centro de gravedad*.

En esta formulación estamos suponiendo tácitamente que todas las partículas apareadas son idénticas (es decir $F_1 = F_2$) lo que en la descripción global se traduce diciendo que el cuerpo es homogéneo o de densidad uniforme.

Determinemos la posición del centro de gravedad del cuerpo de la Fig. E8a, de espesor y densidad uniformes. Este cuerpo no es un cuerpo geométrico regular, pero podemos dividirlo en sectores que sí lo son, como por ejemplo los dos paralelepípedos de la figura (hay otras divisiones posibles, todas equivalentes para la obtención del centro de gravedad, pruebe buscarlas).



Razonemos que si hallamos el centro de gravedad sumando las fuerzas gravitatorias elementales sobre cada partícula del cuerpo, podemos hallarlo también sumando resultantes parciales, como harían los pesos de cada paralelepípedo.



Cada paralelepípedo es además un cuerpo geométrico regular, y siendo homogéneos, el centro de gravedad coincide con el centro geométrico que es el punto de intersección de sus diagonales. Como el espesor es uniforme, ambos centros $\mathbf{O}_1$ y $\mathbf{O}_2$ se encuentran sobre un plano vertical que corta por la mitad al cuerpo y es paralelo a la cara frontal. Dibujamos en este plano un par de ejes *(x,y)*; con origen en el punto **A** del cuerpo y ubicamos los centros $\mathbf{O}_1$ y $\mathbf{O}_2$ como se indica en la figura.

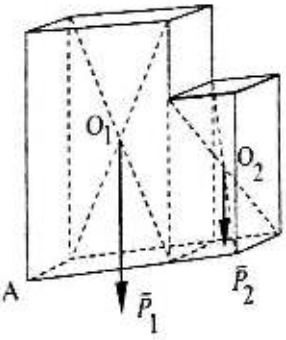


Fig. E8a

Nuestro siguiente paso será sumar los pesos parciales $\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$ para hallar la posición del centro de gravedad **O** del cuerpo completo. Este punto se hallará sobre la recta $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$, y su coordenada x dependerá de la relación entre las intensidades $\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$, que no son iguales porque los volúmenes de ambos paralelepípedos no lo son. Si δ es la densidad, uniforme, del cuerpo,

$$P_1 = m_1 g = \delta V_1 g$$
$$P_2 = m_2 g = \delta V_2 g \quad \Rightarrow \quad P_1 / P_2 = V_1 / V_2$$

Pero:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= 2m \cdot 3m \cdot 0{,}5m = 3m^3 \\ V_2 &= 1m \cdot 2m \cdot 0{,}5m = 1m^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_1 / P_2 = 3$$

$$\boxed{P_1 = 3P_2}$$

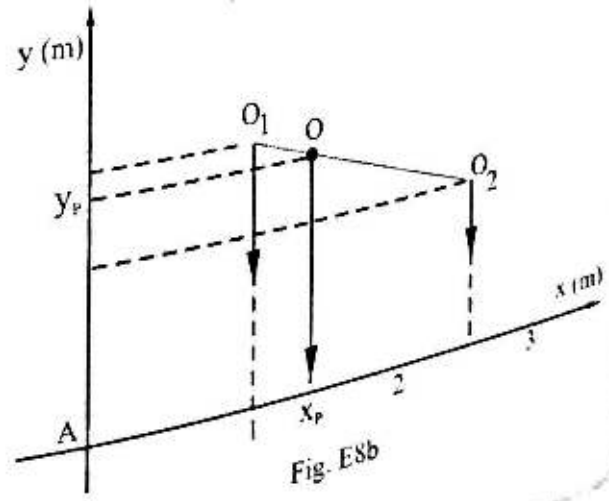


Fig. E8b

Tomando momentos respecto de A y planteando la equivalencia del sistema $\vec{P}_1$ y $\vec{P}_2$ y el sistema $\vec{P}$:

$$P.\,x_P = P_1.\,x_1 + P_2.\,x_2 \quad \Rightarrow \quad x_P = \frac{P_1.x_1 + P_2.x_2}{P_1 + P_2} = \frac{P_2.(3x_1 + x_2)}{4P_2}$$

$$\boxed{x_P = \frac{3x_1 + x_2}{4}}$$

Con $x_1 = 1$ m y $x_2 = 2{,}5$ m; tenemos: $\boxed{x_P = 1{,}375 \text{ m}}$

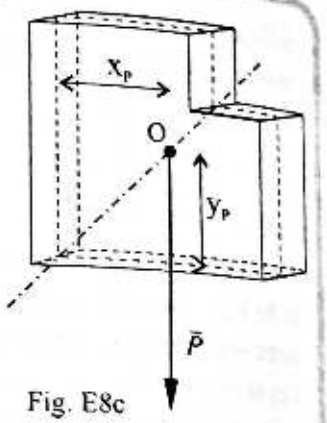


Fig. E8c

La ordenada y_P del centro de gravedad se puede obtener a partir de la ecuación de la recta que pasa por $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$, o más simplemente observando que en los triángulos semejantes $\mathbf{O_1PO_2}$ y $\mathbf{OQO_2}$ de la figura se cumple que

$$O_1P/OQ = PO_2/QO_2$$

y entonces:

$$OQ = (O_1P / PO_2)\, QO_2$$

Pero

$OQ = y_P - 1$ m; $PO_2 = 1{,}5$ m;
$O_1P = 0{,}5$ m; $QO_2 = 2{,}5\text{ m} - x_P = 1{,}125$ m

Luego: $y_P = [(0.5/1{,}5)\ 1{,}125\text{ m} + 1\text{m}]$

$$\boxed{y_P = 1{,}375\,\text{m}}$$

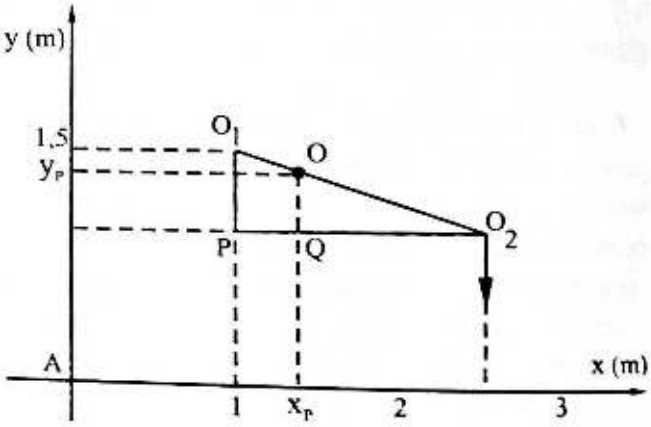


Fig. E8d

Y el centro de gravedad se encuentra sobre el eje dibujado en la Fig. E8c, que como puede sospechar, es el eje de simetría del cuerpo.

El centro de gravedad no necesariamente se encuentra en un punto interior al cuerpo, como se ejemplifica en el caso de la escuadra de la Fig. 17. Además del centro de gravedad es frecuente hablar del centro de masa.

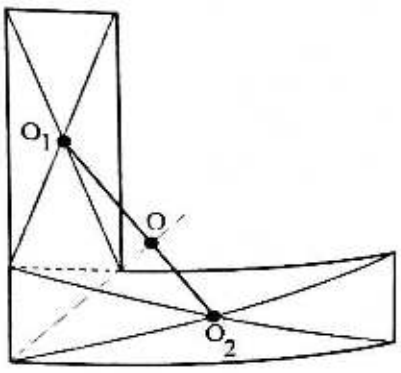


Fig. 17

El centro de masa de un cuerpo rígido es aquel punto que, cuando el cuerpo se encuentra sin fuerzas aplicadas, permanece en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme.
Note que no hablamos para nada del tamaño del objeto. La ubicación del centro de masa depende de la distribución de masa en el volumen del cuerpo, y bajo la acción de cualquier sistema de fuerzas aplicadas, si el cuerpo fuera rígido, el centro de masa es siempre el mismo. Sabemos que esto no ocurre en cuerpos muy extensos, con el centro de gravedad por la variación de la intensidad de la atracción gravitatoria con la distancia de las diversas partículas del cuerpo al centro de atracción.
Salvo expresa indicación en contrario para objetos de gran tamaño, asumiremos que centro de gravedad y centro de masa son uno y el mismo punto para un cuerpo.

Tomemos un cartón rectangular alargado y determinamos su centro de gravedad, le marcamos ese punto con un círculo negro, y también otro punto en un extremo por medio de una cruz como se observa en la Fig. 18.

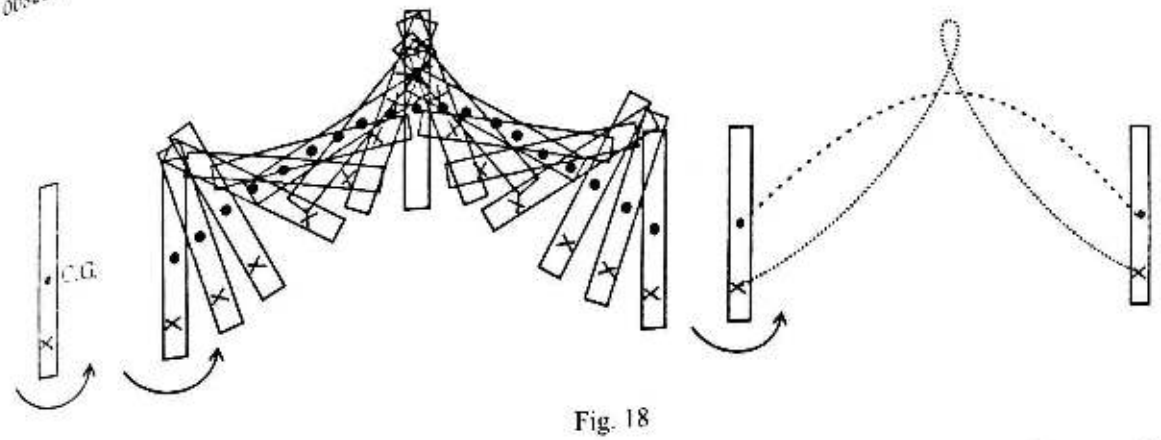


Fig. 18

Si arrojamos al aire ese cartón de modo tal que globalmente describe una trayectoria curva pero que a la vez esté animado de un movimiento de giro sobre sí mismo, observamos que el punto correspondiente al centro de gravedad, que coincide con el centro de masa, describe una trayectoria parabólica. El otro punto del extremo describirán una trayectoria más compleja, y será difícil verla, si el giro es muy veloz.

2.7 - Algunas máquinas simples

Las máquinas simples son dispositivos (algunos muy antiguos) usados para multiplicar los efectos de la fuerza humana, con el fin de levantar o mover objetos pesados.

Palancas: Se trata de una barra rígida que rota sobre uno de sus puntos (**O**). Si colocamos un peso $\vec{P}$ en un extremo, para equilibrarlo habrá que realizar una fuerza $\vec{F}$ en el otro extremo. Suponiendo $\vec{F}$ vertical, la condición de equilibrio es que la barra no gire alrededor de **O**, de modo que

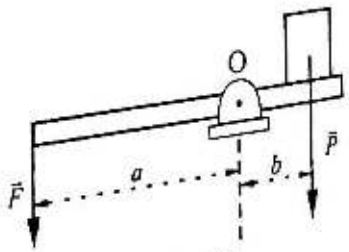


Fig. 19

$$\sum M_{Oi} = 0 \Rightarrow F.a - P.b = 0 \Rightarrow F = (b/a).P$$

La fuerza de vínculo $\vec{F}_V$ en O es también vertical y hacia arriba y su intensidad reemplazando F es:

$$F_V = F + P = P\,(1 + b/a)$$

Observe que si $b < a \Rightarrow F < P$ y se puede equilibrar al peso $\vec{P}$ (y por lo tanto se lo puede "levantar" a velocidad constante) con una fuerza menor.

Demuestre que en general para cualquier posición de la palanca y cualesquiera fuerzas aplicadas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, la condición es (ver Fig.20):

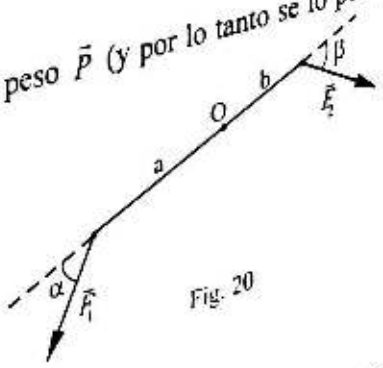


Fig. 20

$$F_1 / F_2 = [(b/a)\,\mathrm{sen}\beta] / \mathrm{sen}\alpha$$

Y compruebe que esta ecuación es válida cualquiera sea el punto de apoyo **O** y los puntos de aplicación de las fuerzas siempre que a y b sean los "brazos de la palanca" entre el apoyo y los puntos de aplicación y que las fuerzas aplicadas produzcan momentos de signo opuesto respecto del apoyo.

Polea: ***La polea fija*** (o simplemente polea) es un disco rígido que puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro, y su utilidad consiste en modificar la dirección de acción de una fuerza.

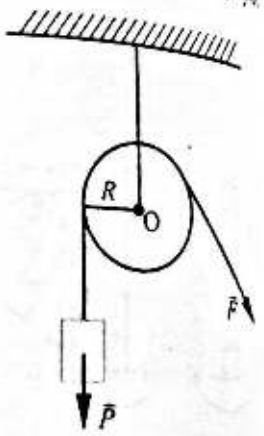


Fig. 21

Para el equilibrio, y tomando momentos respecto de **O**:

$$P.R - F.R = 0 \Rightarrow \boxed{F = P}$$

La polea trabaja como una palanca de brazos iguales. Observe que el resultado obtenido no depende del ángulo de inclinación de $\vec{F}$.

La polea móvil tiene el peso colgado de su centro y un extremo de la cuerda fijo. Consideremos el caso de cuerdas verticales. Tomando momentos con respecto a **O** la condición de suma de momentos igual a cero conduce a:

$$F_1 = F$$

Y además la condición de suma de fuerzas nula da:

$$F_1 + F = P \Rightarrow \boxed{F = P/2}$$

(despreciando el peso propio de la polea)

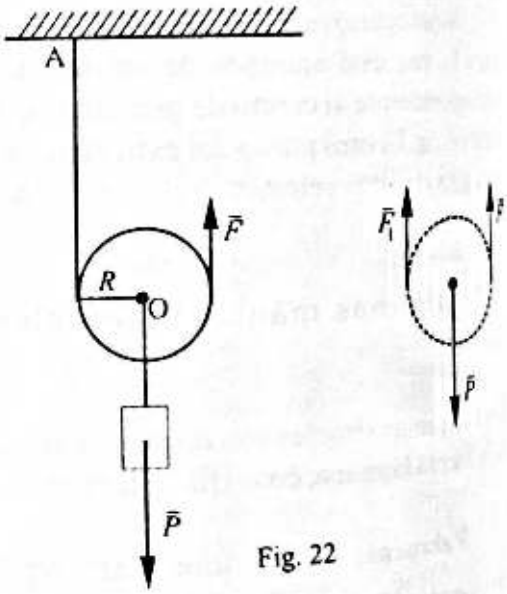


Fig. 22

Los mismos resultados se obtienen si se aplica dos veces la condición de momento total nulo con respecto a los puntos O y A.

Demuestre que en el caso general de la Fig. 23 con cuerdas oblicuas, para el equilibrio resulta la condición

$$\beta = \alpha$$

Y que la fuerza *la intensidad de F* vale:

$$F = P/(2\ sen\alpha)$$

De modo que siendo $sen\,\alpha \leq 1$, la mayor eficiencia (relación P/F) se da para la polea móvil de cuerdas verticales, Fig. 22.

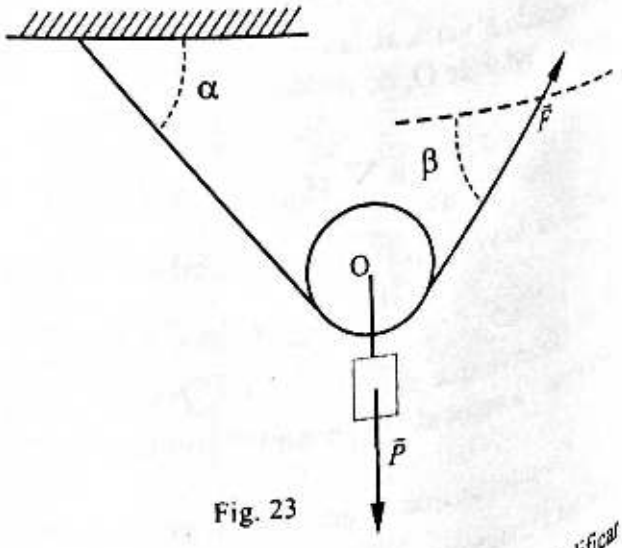


Fig. 23

Podemos combinar poleas para reducir la fuerza necesaria para levantar un peso o modificar su recta de acción. En la Fig. 24 se muestra una combinación de polea móvil y polea fija.

La polea móvil reduce la intensidad de la fuerza necesaria para levantar un peso de intensidad P a F/2. La polea fija modifica, sin cambiar su intensidad, la dirección de la fuerza a aplicar. Observe, y demuestre si no está convencido que $F = P/2$ cualesquiera sean los radios de las dos poleas.

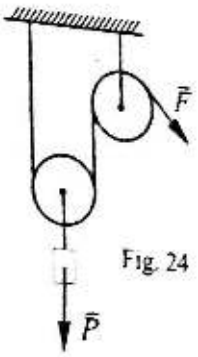


Fig. 24

Algunas combinaciones de poleas son de uso común bajo el nombre de aparejos.

En la Fig. 25 se muestran tres disposiciones clásicas de *aparejos*:

a) Aparejo **factorial:** es un conjunto de N poleas fijas unidas al mismo eje vertical y N poleas móviles también rígidamente unidas. En la figura $N = 3$ y se han "combado" las cuerdas para que quede clara su disposición. Demuestre que todas las sogas soportan una tensión de intensidad $F = P/6$ y que, en general

$$\boxed{F = P/(2N)}$$

b) Aparejo **potencial:** es una combinación de N poleas móviles (=3 en la figura). Como cada polea móvil "reduce" a la mitad la intensidad de la fuerza necesaria para soportar lo que cuelga de ella, demuestre que la primera polea soporta un peso de intensidad P, la segunda P/2, la tercera P/4 y finalmente $F = P/8$, o sea $F = P/2^3$.
En general:

$$\boxed{F = P/2^N}$$

c) Aparejo **diferencial:** se trata de una polea móvil que soporta el peso de dos poleas fijas de radios diferentes R y r $(R > r)$ unidas entre sí. Habiendo tomado momentos respecto de un punto **O** centro de las poleas fijas, demuestre que:

$$\boxed{F = P[(R-r)/2R]}$$

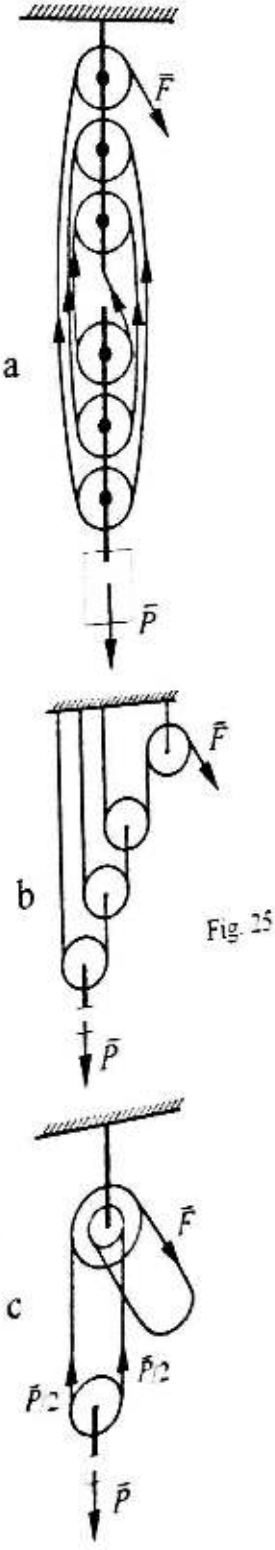


Fig. 25

Los aparejos de este tipo suelen usar cadenas y engranajes, para evitar el deslizamiento. Observe que la fuerza $\bar{F}$ necesaria disminuye a medida que los radios de las poleas fijas se hacen de valor similar, pero en esa parte la rapidez con que se eleva el peso es proporcional a $R - r$, lo cual indica que, a menor fuerza aplicada, menor velocidad de subida. Relacione este comportamiento con el teorema trabajo-energía.

Torno: El torno es un antiguo mecanismo que consiste en un rodillo de radio R provisto de una manivela de longitud l en un extremo.

El peso cuelga de una cuerda fija al rodillo y al girar la manivela esta cuerda se enrosca levantando al peso. En la condición de equilibrio aplique momentos respecto del eje del rodillo para demostrar que:

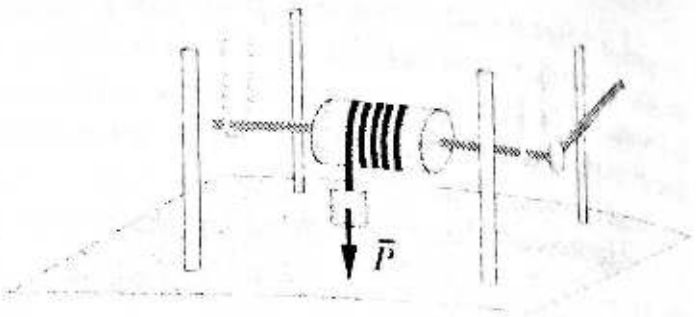


Fig.26

$$\boxed{F = (R/l)\,P}$$

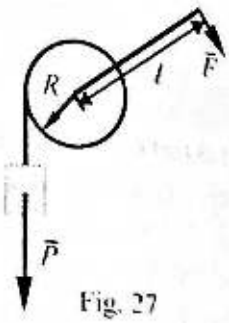


Fig. 27

Obviamente un rodillo de pequeño radio necesita muchas vueltas para levantar el peso, y una larga manivela, además de los problemas de construcción, una rigidez muy elevada.

Plano Inclinado: o también rampa. Muy usado para levantar objetos deslizándolos a su largo. Hemos visto ya que en el equilibrio:

$\boxed{F = P\,sen\alpha}$, y como $sen\alpha \leq 1 \Rightarrow F \leq P$.

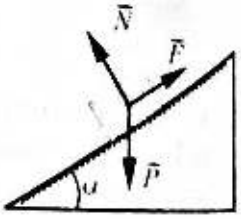


Fig. 28

Balanza: La balanza más simple consiste en una palanca de brazos iguales. Al poner un cuerpo pesado en el platillo izquierdo el fiel o indicador se desequilibra hacia la derecha de la escala. Se lo equilibra llevándolo a la posición original poniendo una pesa en el otro platillo. Para el equilibrio, tomando momentos respecto al punto de apoyo:

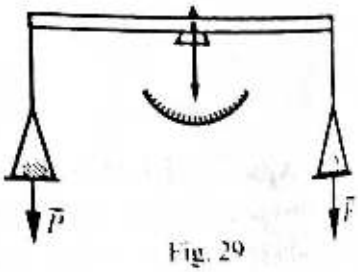


Fig. 29

$\boxed{F = P}$ (palanca de brazos iguales).

Es muy difícil que en la práctica los brazos sean exactamente iguales, de modo que producen errores que son importantes en pesadas de precisión. Para solucionar este problema puede recurrirse al método de la doble pesada, en el cual se determina primero el "peso" F_1 colocando el objeto, digamos, en el platillo de la izquierda y luego el "peso" F_2 colocando el objeto en el platillo de la derecha. Si los brazos son desiguales, digamos de longitud a_1 el de la izquierda y a_2 el de la derecha, F_1 será distinto de F_2. Planteando momentos para ambos casos:

$$P \cdot a_1 = F_1 \cdot a_2 \qquad P \cdot a_2 = F_2 \cdot a_1$$

Luego: $a_1 / a_2 = F_1 / P = P / F_2 \Rightarrow \boxed{P = \sqrt{F_1 F_2}}$

La balanza de platillos es una palanca, cuyas condiciones de equilibrio hemos determinado con las ecuaciones de equilibrio de rotación. Hay otros argumentos posibles. Uno de los más antiguos y curiosos por el ingenio con que se formuló es el de Arquímedes, con el que deseamos concluir esta sección:

Análisis de Arquímedes de la palanca: Para hallar la condición de equilibrio, Arquímedes utilizó sólo nociones de simetría. Supuso que si la barra es uniforme, quedará en equilibrio al suspenderla de su punto medio. Seguidamente imaginó a la barra uniforme dividida en dos secciones desiguales, cada una de las cuales está suspendida de su punto medio. La varilla superior -pensó Arquímedes fundadamente- no alterará su condición, dado que, aunque de manera diferente, sigue ejerciendo las necesarias fuerzas para mantener la barra homogénea en la misma posición que antes.

Sólo resta una consideración geométrica: la distancia entre los dos hilos es la mitad de la longitud total, puesto que está formada por las mitades de ambos fragmentos añadidos. Trasladaremos mentalmente el segmento **AO** hacia la derecha, en un desplazamiento igual a $a/2$. Cuando **A** coincide con el hilo de la izquierda, **O** coincidirá con el de la derecha, y entonces podemos ver que la distancia y vale a 2. Análogamente, x vale $b/2$. Si se suponen los pesos de ambos fragmentos proporcionales a sus longitudes, resulta:

(peso de a)/(peso de b) = y/x

o bien

x . (peso de a) = y . (peso de b)

que es la ecuación que obtuvimos anteriormente.

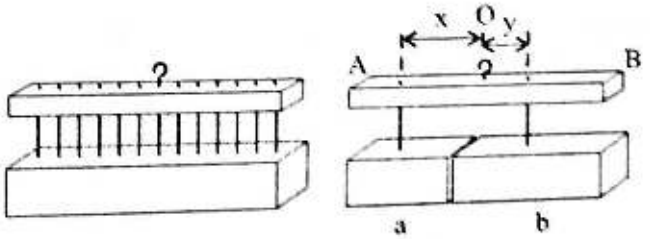


Fig. 30

2.8 - Resumen

Cuerpos extensos: Un cuerpo extenso puede considerarse como un conjunto de partículas que interaccionan entre sí mediante esfuerzos de cohesión.

Cuerpo rígido: Un cuerpo rígido es un cuerpo extenso que no se deforma bajo acción de fuerzas exteriores. Al no variar las distancias entre sus partículas las fuerzas de cohesión interiores no se modifican con respecto a la situación de cuerpo aislado.
Toda modificación del estado de movimiento del cuerpo rígido se produce a "causa" del sistema de fuerzas exteriores aplicadas.
Las fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido se pueden trasladar a lo largo de su recta de acción sin modificar sus efectos.

Cupla: Un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido constituye una cupla cuando su suma vectorial es nula, la suma de momentos no lo es, y no depende del centro de momentos. Los cuerpos rígidos sobre los que actúan cuplas giran acelerados sin que su centro de masa se acelere respecto de un sistema de referencia inercial.

Condiciones de equilibrio: $\vec{f} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases} \qquad M_O = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_{O\,F} = 0$

El centro de momentos **O** puede ser un punto cualquiera.

Centro de gravedad: Es el punto de aplicación del peso del cuerpo debida a la atracción gravitatoria.

FE DE ERRATAS

EDICION 1997 a 2003

Tema	Pág.	Donde dice	Debe decir
Fig. 3.13	48	$\vec{v} = +20\,m/s\,\vec{i}$	$\vec{v} = +20\,m/s\,\vec{j}$
Fig. 4.1	42	...constante $\vec{v}_{AB}$	...constante $\vec{v}_{BA}$
Primera ecuación	49	$y = tg\theta.....$	$y = y_0 + tg\theta.....$
Mov. Circ. Unif.	49	$\Delta w = \Delta s / r$	$\Delta\theta = \Delta s / r$
Dinámica	80	Fig. 1.25 ←	Fig. 1.25 →
Energía mecánica	130	no conservativas o disipativas	no conservativas (tachar disipativas)
Trabajo de fuerzas elásticas	131	$L_{Fe} = ½ K [\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2]$ $L_{Fe} = ½ K [(x_2 - l_0)^2 - (x_1 - l_0)^2]$ $L_{Fe} = ½ K [x_2^2 - x_1^2]$	$L_{Fe} = - ½ K [\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2]$ $L_{Fe} = - ½ K [(x_2 - l_0)^2 - (x_1 - l_0)^2]$ $L_{Fe} = - ½ K [x_2^2 - x_1^2]$
Figura	137	Fig. 2.13	Fig. 2.11

INDICE

INTRODUCCIÓN

A LOS ALUMNOS....3
BIBLIOGRAFÍA....6
PROGRAMA....8

UNIDAD 1 — CINEMATICA

CAPITULO 1 — CINEMATICA VECTORIAL

1.1 INTRODUCCION....9
1.2 POSICIONES E INSTANTES....9
1.3 DESCRIPCION DEL MOVIMIENTO14
1.4 DESPLAZAMIENTOS Y LAPSOS. VELOCIDAD MEDIA....10
1.5 VELOCIDAD Y ACELERACION INSTANTANEAS...12
1.6 RELACIONES ENTRE COMPONENTES DE r,v, a - GRAFICOS....16
1.7 RESUMEN....20

CAPITULO 2 MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME

2.1 ECUACION HORARIA....21
2.2 ENCUENTROS....25
2.3 RESUMEN....29

CAPITULO 3 — MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO

3.1 ECUACION HORARIA....30
3.2 ENCUENTROS....34
3.3 MOVIMIENTOS RECTILINEOS EN LAS PROXIMIDADES DE LA TIERRA....36
3.3.1 CAIDA DE LOS CUERPOS....36
CAIDA LIBRE Y TIRO VERTIACAL....37
3.4 INCLUSION DE LA RESISTENCIA DEL AIRE....39
3.5 RESUMEN....39

CAPITULO 4 — MOVIMIENTO RELATIVO

4.1 INTRODUCCION....41
4.2 LA TRANSFORMACION DE GALILEO....42
4.3 RESUMEN....46

CAPITULO 5

MOVIMIENTOS EN UN PLANO - TIRO OBLICUO

5.1 ECUACIONES HORARIAS....47
5.2 TRAYECTORIA DEL TIRO OBLICUO....48
5.3 RESUMEN....52

CAPITULO 6 — MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

6.1 INTRODUCCION....54
6.2 VELOCIDAD ANGULAR Y TANGENCIAL....54
6.3 PERIODO Y FRECUENCIA ECUACION HORARIA....56
6.4 ACELERACION....58
6.5 RESUMEN....60

CAPITULO 7 — CINEMETICA ESCALAR

7.1 COORDENADAS INTRINSECAS....61

UNIDAD 2 — DINAMICA

CAPITULO 1 — LEYES DE LA DINAMICA

1.1 INTRODUCCION....65
1.2 CONCEPTO INTUITIVO DE FUERZA....65
1.2.1 COMPOSICION DE FUERZAS RESULTANTES....66
1.3 PRINCIPIOS DE NEWTON....69
1.3.1 ALGUNAS REFLEXIONES PREVIAS LEYES DE NEWTON....69
1.3.2 SIGNIFICADOS Y ALCANCE....70
1.4 EJEMPLOS DE APLICACION....72
1.4.1 DINAMICA EN LOS MOVIMIENTOS RECTILINEOS....72
1.4.2 DINAMICA EN LOS MOVIMIENTOS CURVILINEOS....78

CAPITULO 2 — TIPOS DE FUERZAS

2.1 FUERZAS DE ROZAMIENTO....81
2.1.1 MESA DE AIRE IMPROVISADA....82
2.1.2 VISCOSIDAD....87
2.2 FUERZAS ELASTICAS....87
2.3 FUERZA GRAVITATORIA....90
2.3.1 LA LEY DE GRAVITACION Y SU EXPRESION VECTORIAL....96
2.4 OTRAS FUERZAS FUNDAMENTALES DE LA NATURALEZA....96
2.4.1 FUERZAS ELECTROSTATICAS....96
2.4.2 FUERZAS NUCLEARES....97

CAPITULO 3 — TEMAS SUPLEMENTARIOS

3.1 SISTEMAS INERCIALES Y NO INERCIALES....99
3.1.1 PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA....105
3.2 LAS LEYES DE LA DINAMICA SEGUN MACH....106
3.2.1 ACELERACIONES CENTRIPETAS....110
3.2.2 LA FUERZA Y EL DIAGRAMA DE CUERPO AISLADO....113
3.2.3 LA FUERZA SEGUN EL DINAMOMETRO....114
3.2.4 LA LEY DE LA MASA....115

UNIDAD 3 — LEYES DE CONSERVACION

CAPITULO 1 — TRABAJO Y ENERGIA

1.1 INTRODUCCION....117
1.2 TRABAJO Y ENERGIA CINETICA....118
1.3 TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE....120
1.3.1 UNIDADES....123
1.4 TRABAJO DE UN SISTEMA DE FUERZAS....124
1.5 TRABAJO DE FUERZAS VARIABLES....126
1.6 POTENCIA....128
1.6.1 UNIDADES....128

CAPITULO 2 ENERGIA MECANICA

2.1 FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS 130
2.2 ENERGIA POTENCIAL 132
2.2.1 ENERGIA POTENCIAL GRAVITATORIA 132
2.2.2 ENERGIA POTENCIAL ELASTICA 133
2.2.3 ENERGIA POTENCIAL Y FUERZAS 135
2.3 ENERGIA MECANICA 136
2.4 APLICACIONES 137
2.5 LA ENERGIA Y SU CONSERVACION 141
2.5.1 EQUIVALENCIA MASA - ENERGIA 142

CAPITULO 3 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

3.1 INTRODUCCION 144
3.2 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO 145
3.3 SISTEMA DE PUNTOS MATERIALES 146
3.4 LEY DE CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO 147
3.5 CENTRO DE MASA 149
3.5.1 CENTRO DE MASA DE UN TRIANGULO HOMOGENEO 153
3.5.2 EJEMPLOS Y CONSIDERACIONES ACERCA DEL CENTRO DE MASA 154
3.6 CHOQUE 156
3.6.1 CHOQUE ELASTICO 157
3.6.2 CHOQUE PLASTICO 161

APENEDICE DE MATEMATICA

CAPITULO 1 ALGEBRA

1.1 NOCIONES ELEMENTALES 166
1.2 INTERPRETACIONES GRAFICAS 172
1.3 TRIGONOMETRIA ELEMENTAL 176
1.4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 182
1.5 ECUACION CUADRATICA 184
1.6 NOTACION CIENTIFICA 188
1.7 EJERCICIOS DE APLICACION 190
1.8 PROBLEMAS DE APLICACION 191

CAPITULO 2 VECTORES

2.1 NOCIONES ELEMENTALES Y DEFINICIONES 197
2.2 OPERACIONES CON VECTORES 200
2.2 PROBLEMAS DE APLICACION 204

CAPITULO 3 ANALISIS MATEMATICO

3.1 NOCION DE LIMITE Y DERIVADA 206
3.2 PROBLEMAS DE APLICACION 209

CAPITULO 4 MAGNITUDES FISICAS

4.1 UNIDADES Y MAGNITUDES FISICAS 210

RESPUESTAS PROBLEMAS DE APLICACION 215

UNIDAD 4 ESTATICA

CAPITULO 1 CUERPOS PUNTUALES

1.1 EQUILIBRIO DE CUERPOS PUNTUALES 217
1.2 COMPOSICION DE FUERZAS CONCURENTES 219
1.2.1 EJEMPLOS DE APLICACION 223
1.3 DESCOMPOSICION DE FUERZAS 227
1.4 FUERZAS DE VINCULO 229
1.4.1 EJEMPLOS DE APLICACION 230
1.5 RESUMEN 231

CAPITULO 2 CUERPOS EXTENSOS

2.1 EQUILIBRIO DE CUERPOS EXTENSOS 233
2.2 CUERPO RIGIDO 234
2.3 MOMENTO DE UNA FUERZA. CUPLA 236
2.4 CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO 240
2.5 CABLES Y BARRAS. VINCULOS 242
2.6 CENTRO DE GRAVEDAD CENTRO DE MASA 249
2.7 ALGUNAS MAQUINAS SIMPLES 253
2.8 RESUMEN 257

FE DE ERRATAS 258

HIDROSTÁTICA

Autores: Jorge Nielsen
Cecilia Sobico
Jorge Sztrajman
Diseño editorial: Cecilia Sobico

Introducción

Fluidos en equilibrio

La materia existe en diferentes estados de agregación: sólido, líquido y gaseoso. Los líquidos y los gases tienen propiedades comunes, tales como su capacidad de fluir y adoptar la forma de los recipientes que los contienen, por lo que se los denomina conjuntamente *fluidos*.

Los líquidos son prácticamente incompresibles, por lo que podemos considerar que su volumen no se modifica. El gas, en cambio, se expande y comprime con facilidad.

La *hidrostática* estudia el comportamiento de los líquidos en equilibrio, es decir cuando no hay fuerzas que alteren el estado de reposo o de movimiento del líquido. También se emplea, como aproximación, en algunas situaciones de falta de equilibrio en las que los efectos dinámicos son de poca monta.

Aunque los fluidos obedecen a las mismas leyes físicas que los sólidos, la facilidad con la que cambian de forma hace que sea conveniente estudiar pequeñas porciones en lugar de todo el fluido [1]. Por eso se reemplazan las *magnitudes extensivas* (que dependen de la cantidad de materia) por las *magnitudes intensivas* (que no dependen de la cantidad de materia): la masa se reemplaza por la *densidad* y el peso por el *peso específico*.

Hidro. Aunque *hidro* en griego significa agua, la hidrostática se ocupa de los líquidos en equilibrio, en general.

Densidad y peso específico

La *densidad* (δ) de un cuerpo es el cociente entre la masa (m) del cuerpo y el volumen (V) que ocupa:

$$\delta = \frac{m}{V}$$

δ. La letra griega **δ** (delta) es la equivalente a nuestra "d", de la palabra densidad.

Como ya dijimos, la densidad es una magnitud intensiva (no depende de la cantidad de materia sino solo del tipo de materia).

Las unidades de medida de la densidad son, por ejemplo, kg/lt. Así, la densidad del agua es aproximadamente de 1 kg/lt y la del hierro 7,8 kg/lt. Sin embargo, pueden utilizarse otras unidades, como por ejemplo kg/dm^3, g/mm^3 y lb/pie^3. En el sistema internacional, la densidad se mide en kg/m^3.

Cuando el cuerpo es homogéneo, la densidad es la misma en diferentes regiones del cuerpo. Si el cuerpo es heterogéneo, la densidad varía para diferentes regiones del cuerpo y se puede establecer una *densidad media*, como el cociente entre la masa del cuerpo y su volumen.

La densidad de los líquidos varía muy poco dentro de muy amplios límites de presión y temperatura. En cambio, la de los gases es muy sensible a las variaciones de presión y temperatura.

De manera análoga, el peso específico (ρ) es el cociente entre el peso (P) y el volumen (V), con las mismas consideraciones anteriores:

$$\rho = \frac{P}{V} = \frac{m \cdot g}{V} = \delta \cdot g$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

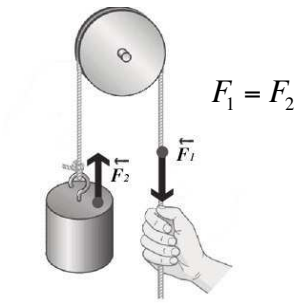
ρ. La letra griega **ρ** (rho) es la equivalente a nuestra "r", aunque se parece a la "p" de peso.

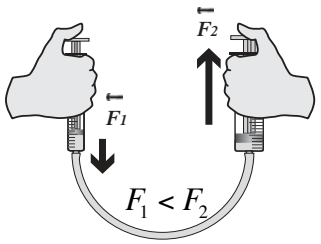
Material	Peso Especifico (N/m3)
Agua (4 ºC y p = 1 atm)	9.999,70
Agua de Mar (15 ºC y p = 1 atm)	10.250,00
Alcohol	8.000,00
Aceite de Oliva	9.200,00
Aire Frio (0 ºC y p = 1 atm)	12,90
Hierro	78.000,00
Madera Dura (Quebracho)	13.000,00
Plomo	114.000,00
Papel	12.000,00
Nafta	7.500,00
Aluminio	27.000,00

Unidades posibles para el peso específico son, por ejemplo, kgf/lt, y gf/mm^3. En el sistema internacional la unidad del peso específico es N/m^3.

Avoirdupois es el nombre del sistema anglosajón en el que el peso específico se mide en libras fuerza sobre pie cúbico (lbf/ft^3). En ese sistema también coexiste la doble denominación de lb (libra masa) y lbf (libra fuerza), como pasa con el kilogramo en el sistema internacional.

[1] Aunque lo suficientemente grande con respecto al tamaño molecular





Fuerza y presión

Cuando en una situación de equilibrio la fuerza la transmite un sólido, como por ejemplo una soga, el valor de la fuerza no cambia por efecto de la transmisión. Consideremos, por ejemplo un cuerpo que cuelga de una polea y se mantienen en equilibrio utilizando una soga. La soga transmite la fuerza sin cambiar su valor: la intensidad de la fuerza que la mano hace sobre la soga es la misma que la que la soga hace sobre el cuerpo.

Sin embargo, cuando la fuerza la transmite un fluido el valor de la fuerza puede cambiar mucho. Para entenderlo podemos recurrir a dos jeringas (sin aguja) de secciones diferentes y un tubo flexible que las conecta. Si llenamos con agua los depósitos de ambas jeringas y el tubo flexible, al empujar uno de los pistones, veremos que la fuerza que hay que hacer en el otro para conseguir el equilibrio es diferente: en el pistón más grueso hay que hacer mayor fuerza.

El hecho de que los fluidos modifiquen el valor de la fuerza al transmitirla, le resta importancia al concepto de fuerza al tratar con ellos. ¿Habrá alguna otra magnitud física, en lugar de la fuerza, que no cambie de valor al transmitirse? Sí, es la *presión*.

En el caso de las jeringas:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

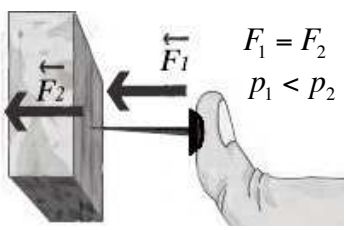
F_1 es la fuerza que el pistón angosto hace sobre el fluido y A_1 el área de la sección transversal del pistón angosto. F_2 es la fuerza que el fluido hace sobre el pistón grueso y A_2 el área de la sección transversal del pistón grueso.

Por eso, es conveniente introducir la *presión* (p), de un fluido como la intensidad de la fuerza que se ejerce, por unidad de área [2]:

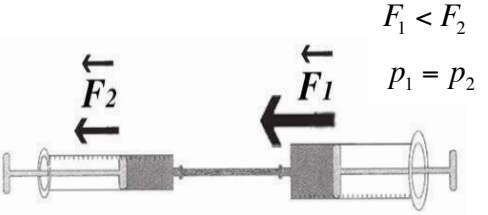
$$p = \frac{F}{A}$$

La presión, una magnitud escalar. La fuerza aplicada sobre la superficie es un vector. A pesar de eso, la presión que resulta a partir de esa fuerza, es un escalar: no tiene dirección.

Para una fuerza aplicada sobre un sólido en equilibrio no existen restricciones en cuanto a su dirección. En cambio, para un fluido en equilibrio, la fuerza aplicada sobre él (o la que él aplica) siempre es perpendicular a la superficie, ya que si hubiera fuerzas tangenciales obligarían al fluido a ponerse en movimiento, o sea a fluir.



En el equilibrio la fuerza que el dedo hace sobre la chincheta (F_1) es de igual valor que la fuerza que la chincheta hace sobre la pared (F_2). La presión en la cabeza circular y chata de la chincheta (y en el dedo) es menor que la presión en su afilada punta (y en la pared).



La fuerza que el émbolo grande hace sobre el fluido (F_1) es de mayor intensidad que la fuerza que el fluido hace sobre el émbolo pequeño (F_2). En el equilibrio la presión en el émbolo grande es igual a la presión en el émbolo pequeño.

En pocas palabras, así como el concepto de **fuerza** es muy útil para los cuerpos **sólidos**, el concepto de **presión** es el más importante para los **fluidos**.

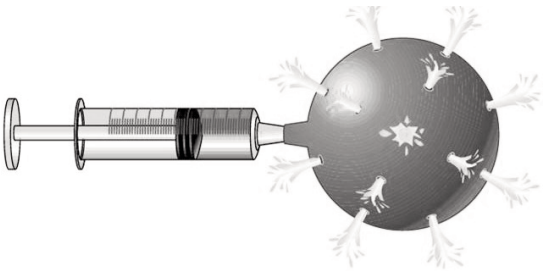
[2] Con más precisión, la presión es el cociente entre el módulo de la fuerza perpendicular a una superficie y el área de esa superficie.

Principio de Pascal

El hecho de que los fluidos en equilibrio transmiten la presión sin modificar su intensidad fue establecido por el físico y matemático francés Blaise Pascal (1623–1662) y se conoce como **Principio de Pascal**:

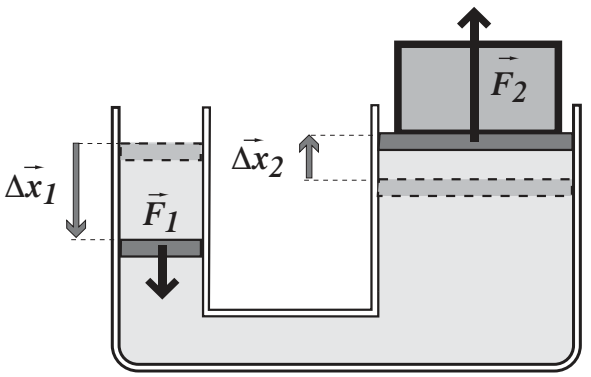
Los cambios de presión en un fluido incompresible (líquido) en equilibrio dentro de un recipiente de paredes indeformables se transmite sin alteración a todo el fluido.

Incompresibilidad de los líquidos. Aunque usualmente consideramos que los líquidos son incomprensibles, la verdad es que un poco se comprimen. Esa pequeña compresión es importante, ya que es lo que permite la propagación del sonido a través del líquido.



Esta experiencia permite comprobar la validez del principio de Pascal. Al oprimir el émbolo de la jeringa, el consecuente cambio de presión se transmite a todo el fluido contenido en la esfera rígida y los chorros de agua salen por los orificios al mismo tiempo. Aquellos que están en el mismo plano horizontal tienen la misma amplitud.

También se evidencia el principio de Pascal en la prensa hidráulica de la figura: al hacer fuerza en un extremo, el cambio de presión correspondiente se transmite a través del líquido y se manifiesta por la acción de una fuerza sobre el objeto que está en el otro extremo. Los ascensores hidráulicos y los frenos hidráulicos también se basan en ese principio.



$$\Delta p_1 = \Delta p_2$$
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

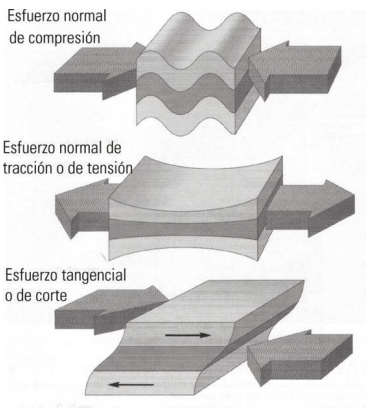
Prensa hidráulica. Es un dispositivo "multiplicador de fuerzas"que funciona por el principo de Pascal.

En la prensa hidráulica se aplica una fuerza sobre el émbolo de menor área y se consigue una fuerza mayor sobre el émbolo mayor. La relación entre las fuerzas es la misma que existe entre las áreas. Si bien se logra amplificar la fuerza, no se amplifica la energía (aún despreciando el rozamiento): el trabajo realizado por la fuerza chica sobre el pistón pequeño es igual al que la fuerza mayor hace sobre el pistón grande (despreciando los efectos dinámicos). El volumen de líquido desplazado por el pistón pequeño se distribuye en una capa fina en el pistón grande ($\Delta V_1 = \Delta V_2$) y el producto de la fuerza por el desplazamiento es igual en ambas ramas. Así,

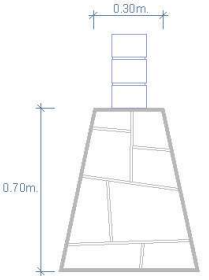
$$\left.\begin{aligned} L_{F_1} &= F_1 \cdot \Delta x_1 = \Delta p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = \Delta p_1 \cdot \Delta V_1 \\ L_{F_2} &= F_2 \cdot \Delta x_2 = \Delta p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = \Delta p_2 \cdot \Delta V_2 \end{aligned}\right\} L_{F_1} = L_{F_2}$$

Prohibida la reproducción total o parcial de este material sin el permiso de la cátedra.

"Presión" en sólidos. En rigor, para cuerpos sólidos el cociente entre el módulo de la fuerza perpendicular que comprime a una superficie y el área de esa superficie se denomina *esfuerzo normal de compresión*. En un fluido ideal las moléculas sólo pueden comprimirse o empujarse, pero en un sólido también pueden "tirar" (*esfuerzo normal de tracción o tensión*) y "arrastrar"(*esfuerzo tangencial o de corte*).



Un bloque apoyado sobre la mesa también origina una presión, que se calcula como el cociente entre el peso del bloque y el área de la superficie de apoyo. (Ver recuadro de la izquierda)



Cimientos. Los edificios se apoyan sobre superficies de dimensiones mayores que las secciones de sus paredes y columnas. El objetivo es que el peso de la construcción se distribuya en un área mayor para evitar que se venza la resistencia mecánica del suelo.

Taco aguja. El peso de la mujer se distribuye en una área muy pequeña. En los antiguos aviones cuyo piso estaba hecho de un material blando estaba prohibido usar este tipo de zapatos.

Unidades de medida de la presión

La presión es quizá una de las magnitudes físicas en las que se emplea más diversidad de unidades para medirla. Una unidad posible es la que resulta de utilizar kgf para la fuerza y cm² para el área, de donde resulta el kgf/cm². Esta unidad tiene la ventaja de que la presión atmosférica (la presión asociada con la fuerza que la atmósfera ejerce sobre el suelo y sobre todos los objetos) es muy próxima a 1 en esas unidades:

$$p_{atm} \cong 1 \ \frac{kgf}{cm^2}$$

El valor de la presión atmosférica permite introducir la unidad *atmósfera* (atm), igual al valor de la presión atmosférica. Así se habla, por ejemplo de una presión de 3 atm, o sea igual a 3 veces la presión atmosférica.

Sin embargo, la unidad recomendada en física es la del sistema internacional, que utiliza newton para la fuerza y m² para el área. Resulta así el N/m², que recibe el nombre de *pascal* (Pa):

$$1\,Pa = 1 \ \frac{N}{m^2}$$

El pascal es una unidad de presión muy pequeña comparada con la presión atmosférica, ya que equivale a 1 N (menos que 1 kgf) repartido en un área de 1 m² (mucho más grande que 1 cm²). Por eso, se suelen usar sus múltiplos, el hectopascal (hPa) = 100 Pa y el kilopascal (kPa) = 1000 Pa.

Para tener una idea del valor de la presión atmosférica en pascales:

$$p_{atm} \cong 1\frac{kgf}{cm^2} \cong \frac{10N}{10^{-4}m^2} = 10^5 \ \frac{N}{m^2} = 100.000 \ Pa = 1000 \ hPa$$

En las estaciones de servicio, todavía es habitual usar unidades de origen anglosajón para medir la presión del aire de los neumáticos. Estas unidades emplean la *libra* (lbf) para la fuerza y la *pulgada cuadrada* (plg²) para el área, de donde resultan lbf/plg². Esta unidad también se conoce como *psi*:

$$1\,psi = 1 \ \frac{lbf}{plg^2}$$

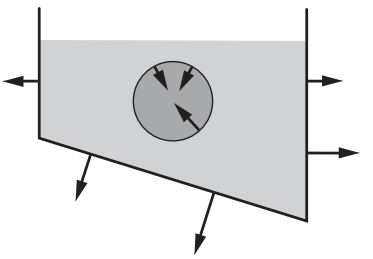
En medicina, es habitual dar la presión de la sangre en milímetros y centímetros de mercurio (mmHg y cmHg) ya que, como veremos en lo que sigue, la altura de una columna de líquido sirve para establecer una medida de la presión.

Presión atmosférica normal. La presión atmosférica varía con la altura y las condiciones meteorológicas. La presión atmosférica normal corresponde a la presión típica, ni alta ni baja, a nivel del mar y se ha estandarizado internacionalmente al valor de 101.325 Pa.

psi. Viene de las iniciales de *pounds per square inch*, que significa libras por pulgada cuadrada, en inglés.

Principio fundamental de la hidrostática

El tipo de enlace que hay entre las moléculas de un líquido hace que sólo pueda ejercer fuerzas perpendiculares de compresión sobre las paredes del recipiente y sobre la superficie de los objetos sumergidos, sin importar la orientación que adopten esas superficies fronteras del líquido. La presión se interpreta como la magnitud de la fuerza normal ejercida por unidad de superficie y puede valer distinto en los diferentes puntos del sistema.



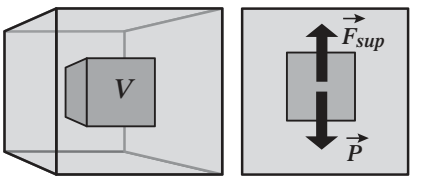
El líquido ejerce fuerzas perpendiculares de compresión sobre las superficies que contacta.

Al sumergirnos en agua podemos sentir que la presión aumenta con la profundidad. Nuestros oídos detectan este cambio de presión, pues percibimos que el líquido ejerce una fuerza normal de compresión mayor sobre la membrana del tímpano cuanto más hondo estamos. La sensación experimentada en una determinada profundidad es la misma, sin que importe la orientación de la cabeza: *la presión es una magnitud escalar no tiene asociada una dirección y un sentido*. En cada punto existe un determinado valor de presión que está en relación con la intensidad de la fuerza que el líquido ejerce perpendicularmente al tímpano, esté la cabeza erguida o acostada.

Si un fluido está en equilibrio cada porción de él está en equilibrio. Consideremos una porción cúbica de líquido de volumen V sumergida en reposo dentro del cuerpo del líquido y efectuemos el análisis dinámico de este sistema. Las fuerzas que recibe son de dos tipos:

1) la fuerza gravitatoria ejercida a distancia por la Tierra ($\vec{P}$)

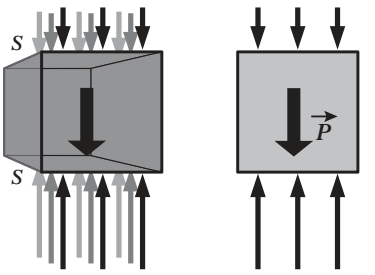
2) la fuerza superficial de contacto ejercida por el fluido circundante correspondiente a la presión del entorno. ($\vec{F}_{sup}$)



El cubo está en equilibrio, por lo que la sumatoria de estas dos fuerzas que recibe es nula. De manera que *el fluido circundante ejerce fuerzas superficiales sobre el cubo cuya resultante es una fuerza vertical hacia arriba de igual módulo que el peso del cubo de fluido*.

El fluido circundante ejerce fuerzas superficiales perpendiculares de compresión sobre cada una de las seis caras del cubo. La resultante de estas fuerzas superficiales es vertical, por lo que las fuerzas horizontales que se ejercen sobre las caras laterales verticales enfrentadas del cubo se contrarrestan.

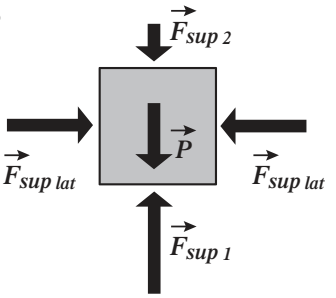
Dado que el fluido del entorno ejerce globalmente una fuerza vertical, para simplificar dibujaremos sólo las fuerzas superficiales verticales que el cubo recibe sobre las caras horizontales de superficie S. El carácter distributivo de esas fuerzas está indicado en la figura con varias flechas que se interpretan como fuerza por unidad de área. Para que el peso sea equilibrado por las fuerzas de contacto, las fuerza por unidad de área sobre la cara inferior del cubo debe ser mayor que la fuerza por unidad de área sobre la cara superior. En definitiva, la presión por debajo del cubo es mayor que por encima: *en el seno de un líquido la presión aumenta con la profundidad*.



$$F_{\sup 1} - F_{\sup 2} - P = 0 \Rightarrow F_{\sup 1} - F_{\sup 2} = P$$

$$p_1 \cdot S - p_2 \cdot S = \rho \cdot V$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho \cdot V}{S} = \rho \cdot d_{12}$$

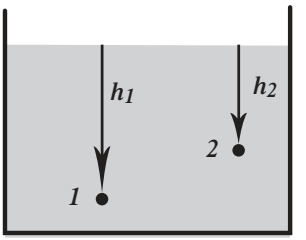


$$p_1 - p_2 = \rho \cdot (h_1 - h_2) = \delta \cdot g \cdot (h_1 - h_2)$$

donde h indica la profundidad (no confundir con la altura).

Esto lo enuncia el ***Principio Fundamental de la Hidrostática*** *:*

"La diferencia de presiones entre dos puntos pertenecientes a un mismo líquido en equilibrio, es igual al peso específico del líquido por la diferencia de profundidad".



Prohibida la reproducción total o parcial de este material sin el permiso de la cátedra.

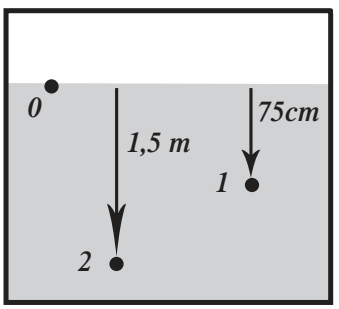
Si consideramos dos recipientes de igual tamaño, llenos, uno con agua y el otro con mercurio (de densidad 13,6 veces la del agua) hasta el mismo nivel, la presión en el fondo debida a esos líquidos no será igual en ambos recipientes: será 13,6 veces mayor para el recipiente que contiene mercurio.

La presión del líquido es la misma para todos los puntos del líquido que se encuentran a la misma profundidad: de otro modo, no habría equilibrio, y el líquido se desplazaría horizontalmente desde los puntos de mayor presión hacia los de presión más pequeña.

En el conjunto de recipientes interconectados de la figura (vasos comunicantes), el líquido alcanza la misma altura en todos los recipientes, con independencia de la forma que tengan. La presión a una dada profundidad es la misma en todos los recipientes.

Ejemplo

Un recipiente cerrado contiene dos fases, una líquida y una gaseosa. Se mantiene la fase gaseosa a una presión constante de 2 atm. Si la presión a 75 cm por debajo de la superficie libre es de 3 atm, ¿cuál es la presión a 1,5 m por debajo de la superficie?



Solución:

Una manera de resolver este problema sin plantear ecuaciones es pensar que desde la superficie del líquido hasta los 75 cm de profundidad, la presión pasó de 2 atm a 3 atm, es decir que aumentó en 1 atm al descender 75 cm. Por lo tanto, al descender otros 75 cm, la presión aumentará en 1 atm más, llegando así a valer 4 atm.

Sin embargo, también podemos arribar a esa conclusión utilizando la fórmula del Principio Fundamental de la Hidrostática (PFH) (es un poco más laborioso, en este caso). Para ello identifiquemos con ***0*** a la superficie del líquido, con ***1*** al punto ubicado 75 cm más abajo y con ***2*** al que está 1,5 m por debajo de la superficie. Aplicando el PFH a los puntos ***0*** y ***1***:

$$p_1 - p_0 = \delta \cdot g \cdot h_1 = 3\,atm - 2\,atm = 1\,atm$$

Aplicándolo a los puntos 0 y 2:

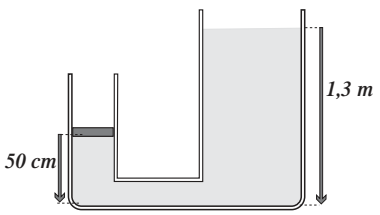
$$p_2 - p_0 = \delta \cdot g \cdot h_2 = \delta \cdot g \cdot 2h_1 = 2\delta \cdot g \cdot h_1 = 2\,atm$$

Entonces,

$$p_2 = p_0 + 2\,atm = 2\,atm + 2\,atm = 4\,atm$$

Ejemplo

El dispositivo de la figura, que contiene un líquido de densidad 2,2 g/cm^3, posee un émbolo de peso despreciable en el cilindro de la izquierda, de 2 cm de diámetro. En el cilindro de la derecha, de 20 cm de diámetro, el líquido está en contacto con el aire. ¿Cuál será la fuerza que habrá que ejercer sobre el émbolo para mantener al sistema en equilibrio?



Aplicando el PFH a los puntos ubicados en las superficies del líquido en ambos extremos, la diferencia de presión es:

$$\Delta p = \delta g \Delta h = 2200\,\frac{kg}{m^3}\,9{,}8\,\frac{m}{s^2}(1{,}3\,m - 0{,}5\,m) = 17248\,Pa$$

El émbolo de la izquierda tiene un área:

$$A = \pi r^2 = 3{,}14\,.\,(0{,}01\,m)^2 = 0{,}000314\,m^2$$

La fuerza necesaria para mantener el equilibrio es:

$$F = A\,\Delta p = 0{,}000314\,m^2\,.\,17248\,Pa = 5{,}4\,N = 553\,gf$$

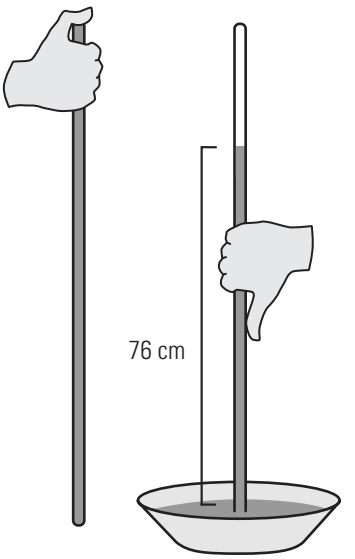
Cómo medir la presión atmosférica

El barómetro de mercurio, instrumento ideado por Evangelista Torricelli (1608-1647) y utilizado para medir la presión atmosférica, consiste en un tubo de ensayo largo, de vidrio, cerrado en un extremo, lleno de mercurio. Cuando el tubo se invierte sobre un recipiente que contiene también mercurio, se derrama una parte dentro del recipiente y el nivel del mercurio dentro del tubo baja hasta que se estabiliza cuando la columna es de unos 76 cm. El espacio generado arriba del mercurio, solo contiene vapor de mercurio, cuya presión es muy pequeña a temperatura ambiente. El hecho es que la presión en la superficie libre de mercurio en contacto con el aire (la presión atmosférica), es la misma que la que tiene el mercurio dentro de la probeta a esa misma altura. En definitiva la presión en la base de la columna de mercurio de 76 cm es igual a la presión en la base de los 100 km de aire atmosférico. Vivimos sumergidos en un mar de aire.

La presion atmosférica normal se estandariza como la presión en la base de una columna de mercurio de 76 cm a una temperatura de 0 ºC en una lugar donde la gravedad vale 9,80665 m/s^2.

A partir de del PFH podemos comprobar que 760 mmHg corresponden al valor conocido de la presión atmosférica normal en hectopascales.

$$p_{atm} = \delta_{Hg} g\, h = 13.595{,}1 \frac{kg}{m^3}\, 9{,}80665 \frac{m}{s^2}\, 0{,}76\, m \cong 101.325\, Pa = 1013{,}25\ hPa$$



El experimento de Torricelli. En honor a Torricelli, el mmHg también se denomina *torr*.

Ejemplo

En las estaciones de servicio todavía se acostumbra medir la presión del aire de los neumáticos en lb/plg^2, también conocida como *psi*. La libra es una unidad de fuerza que equivale a 0,454 kgf y la pulgada es una unidad de longitud igual a 2,54 cm (basada en el ancho del dedo pulgar a la altura de la base de la uña).

1 lb/plg^2 = 0,454 kgf / (2,54 cm)^2 = 0,07 kgf/cm^2 = 7000 Pa.

¿Cuál es la presión del aire, en atmósferas, de un neumático de automóvil que está inflado a 32 lb/plg^2?

Solución:

32 lb/plg^2 = 32 x 0,07 atm = 2,2 atm

Los 32 lb/plg^2 se agregan por encima de la presión atmosférica (que tiene el neumático aunque esté "desinflado"), de modo que la presión del aire del neumático es, en realidad, de 3,2 atm (2,2 atm + +1 atm)= 46 lb/plg^2.

Presión absoluta y presión manométrica

En el ejemplo anterior para distinguir la manera de expresión decimos que el valor de 46 lb/plg^2 ó 3,2 atm corresponde a la presión absoluta (o presión, simplemente), mientras que los valores de 32 lb/plg^2 ó 2,2 atm corresponden a la presión manométrica. Los manómetros son instrumentos utilizado para medir la presión, y la mayoría de ellos mide la diferencia de presión entre la que se quiere medir y la presión atmosférica, es decir la presión manométrica.

Ejemplo

Se conoce la presión absoluta en tres puntos de una cañería y resultan 110 cmHg, 90 cmHg y 70 cmHg. ¿Cuáles son la correspondientes presiones manométricas?

Solución:

Las presiones manométricas se obtienen restando la presión atmosférica (76 cmHg) a las presiones absolutas. Los resultados son 34 cmHg, 14 cmHg y – 6 cmHg.

Presiones negativas. ¿Puede la presión absoluta en un líquido ser negativa? ¿Y la manométrica?

Prohibida la reproducción total o parcial de este material sin el permiso de la cátedra.

El cmHg y su hermano menor, el mmHg, diez veces más chico, también denominado *torr*, es habitualmente utilizado en la medicina para indicar la presión sanguínea. Como esta última oscila debido a los latidos del corazón, se acostumbra indicar dos valores, el máximo y el mínimo y escuchamos, por ejemplo, "doce ocho", que significa 12 cmHg de máxima y 8 cmHg de mínima.

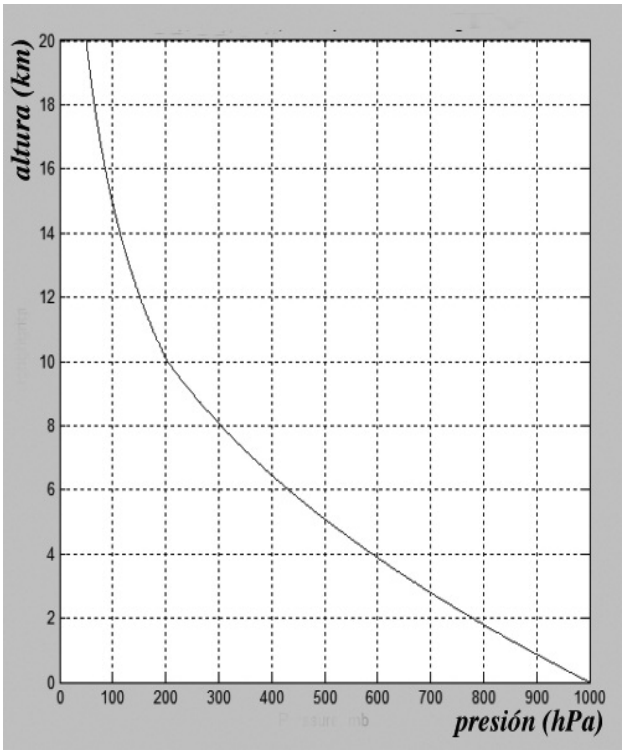
Si la presión sanguínea de una persona oscila entre 12 y 8 cmHg y la presión del aire exterior es de 76 cmHg, en una herida debería entrar aire, en lugar de salir sangre, como realmente ocurre. ¿Qué es lo que no funciona en este argumento?

Además del cmHg y el mmHg, también podemos hablar de "metros de agua" (mH_20): 10 mH_20 = 76 cmHg, aproximadamente. La presión en el fondo del mar de aire en el que vivimos es equivalente a la que hay en la base de una columna de 10 m de agua.

Sistemas de unidades

	pascal (Pa)	bar (bar)	milibar (mbar)	atmósfera técnica (at)	atmósfera (atm)	torr (Torr)	libra-fuerza por pulgada cuadrada (psi)
1 Pa	1 N/m^2	10^{-5}	10^{-2}	$1{,}0197\times10^{-5}$	$9{,}8692\times10^{-6}$	$7{,}5006\times10^{-3}$	$145{,}04\times10^{-6}$
1 bar	100.000	10^6 dyn/cm^2	10^3	1,0197	0,98692	750,06	14,5037744
1 mbar	100	10^{-3}	hPa	0,0010197	0,00098692	0,75006	0,0145037744
1 at	98.066,5	0,980665	980,665	1 kgf/cm^2	0,96784	735,56	14,223
1 atm	101.325	1,01325	1.013,25	1,0332	1	760	14,696
1 torr	133,322	$1{,}3332\times10^{-3}$	1,3332	$1{,}3595\times10^{-3}$	$1{,}3158\times10^{-3}$	1 mm Hg	$19{,}337\times10^{-3}$
1 psi	$6{,}894\times10^3$	$68{,}948\times10^{-3}$	68,948	$70{,}307\times10^{-3}$	$68{,}046\times10^{-3}$	51,715	1 lbf/plg^2

Variaciones de la presión y densidad del aire de la atmósfera a distintas alturas.

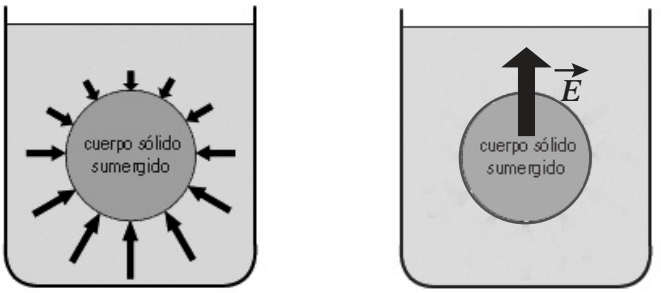


Altura (m)	Presión (hectopascales)	Densidad ($kg \cdot m^{-3}$)
0	1013	1,226
1000	898,6	1,112
2000	794,8	1,007
3000	700,9	0,910
4000	616,2	0,820
5000	540	0,736
10000	264,1	0,413
15000	120,3	0,194

Si bien la atmósfera tiene una altura de casi 100 km, a 10 km del suelo la presión atmosférica es apenas del 20 % de la presión a nivel del mar. ¿Cómo se explica esta desproporción? Si el TFH dice que la diferencia de presión entre dos puntos es proporcional a la diferencia de altura entre ellos, ¿por qué el gráfico de la izquierda no es una recta?

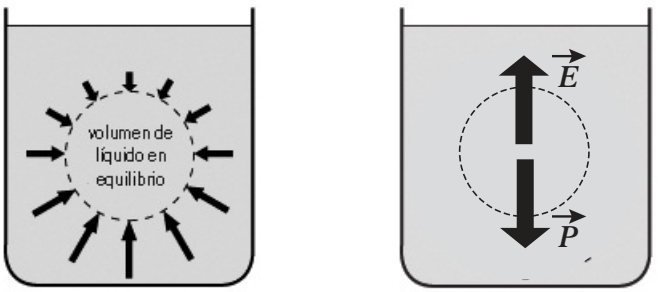
Principio de Arquímedes

Cuando un objeto se encuentra sumergido total o parcialmente en un fluido en reposo, el líquido presiona sobre el objeto. Aparecen entonces fuerzas perpendiculares a la superficie del objeto y, como la presión crece con la profundidad, la parte inferior del objeto recibe más fuerza que la parte superior. El resultado de todas esas fuerzas es una fuerza vertical, dirigida hacia arriba, denominada *empuje*.



En un cuerpo sumergido las fuerzas que empujan desde abajo superan a las que empujan desde arriba y, por eso, el fluido ejerce una fuerza (empuje) dirigida hacia arriba.

Cualquier cuerpo sumergido, independientemente del material de que está hecho, desplaza una porción de fluido de igual forma y volumen que la del propio cuerpo. La porción de fluido que ha de "sacarse" para hacer lugar al cuerpo está en equilibrio con su entorno por lo que, como vimos en la pág. 5, el fluido circundante le ejerce fuerzas superficiales cuya resultante es una fuerza vertical hacia arriba de igual módulo que el peso de la porción de dicho fluido.



El módulo del empuje es igual al del peso del volumen del líquido desalojado

Al reemplazar el líquido por el cuerpo intruso el entorno no se ha modificado, por lo que ejercerá sobre el cuerpo de reemplazo la misma fuerza que recibía la porción de líquido desalojada.

Esta situación se expresa mediante el **Principio de Arquímedes**:

> *"Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo, recibe un empuje vertical de abajo hacia arriba igual al peso del volumen del fluido que desaloja». Esta fuerza recibe el nombre de empuje hidrostático.*

De acuerdo con el principio de Arquímedes, el módulo del empuje (E) se puede expresar como:

$$E = P_{\substack{fluido \\ desalojado}} = m_{\substack{fluido \\ desalojado}} \cdot g \cdot V_{\substack{cuerpo \\ sumergido}} = \delta_{fluido} \cdot g \cdot V_{\substack{cuerpo \\ sumergido}}$$

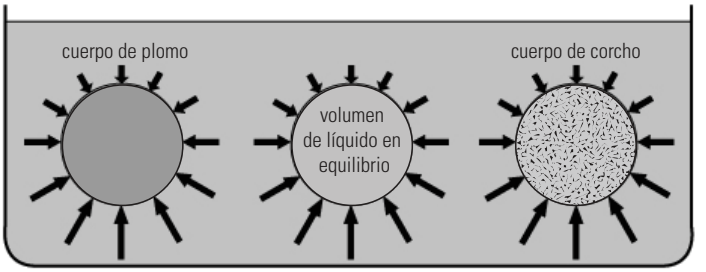
donde, m es la masa y V el volumen.

El empuje actúa verticalmente hacia arriba y se puede considerar aplicado en el centro de gravedad del fluido desalojado por el cuerpo (siempre que el cuerpo esté rodeado de fluido, para que la fuerza de empuje sea vertical). Ese punto recibe el nombre de *centro de flotación* o *de carena* .

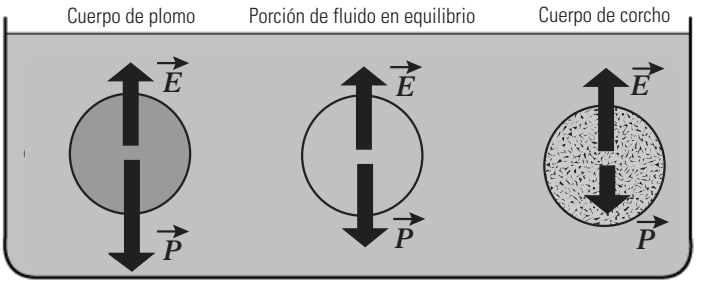
Prohibida la reproducción total o parcial de este material sin el permiso de la cátedra.

Hundirse o flotar

El empuje que recibe el cuerpo depende del volumen del cuerpo sumergido y no de su peso. El valor del empuje es igual al del peso del volumen de líquido que desaloja.



Un cuerpo sumergido completamente en un fluido se hundirá o flotará según cuál sea la relación entre su propio peso y el empuje (que es igual al del peso del volumen de líquido que desaloja).



Adiós mundo cruel

Si la densidad del cuerpo es mayor que la del fluido, el cuerpo tiene un peso mayor al peso del volumen de fluido que desaloja, y entonces se hunde hasta llegar al fondo.

Si la densidad media del cuerpo es igual que la del fluido, el cuerpo tiene un peso igual al peso del volumen de fluido que desaloja, y entonces flota "a media agua", es decir completamente sumergido.

Si la densidad del cuerpo es menor que la del fluido, el cuerpo tiene un peso menor al peso del volumen de fluido que desaloja, entonces el cuerpo sube hasta la superficie y flota semisumergido. En el equilibrio, el cuerpo flotante está sumergido parcialmente de manera que el peso del volumen de líquido desalojado equipare exactamente a su peso.

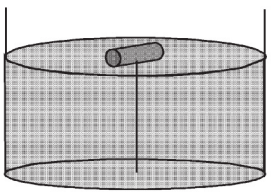
Del principio de Arquímedes surge que:

$\delta_{\text{cuerpo}} > \delta_{\text{fluido}}$ entonces se hunde

$\delta_{\text{cuerpo}} = \delta_{\text{fluido}}$ entonces flota completamente sumergido

$\delta_{\text{cuerpo}} < \delta_{\text{fluido}}$ entonces flota parcialmente sumergido

Ejemplo



En la figura, se observa un cilindro de 2 m^3 unido mediante una cuerda ideal (inextensible y de masa despreciable) al fondo de un recipiente lleno de agua (densidad 1 kg/dm^3). En estas condiciones el cilindro tiene sumergida la mitad de su volumen. Si la densidad del cilindro es de 100 kg/m^3, ¿qué tensión tiene la cuerda?

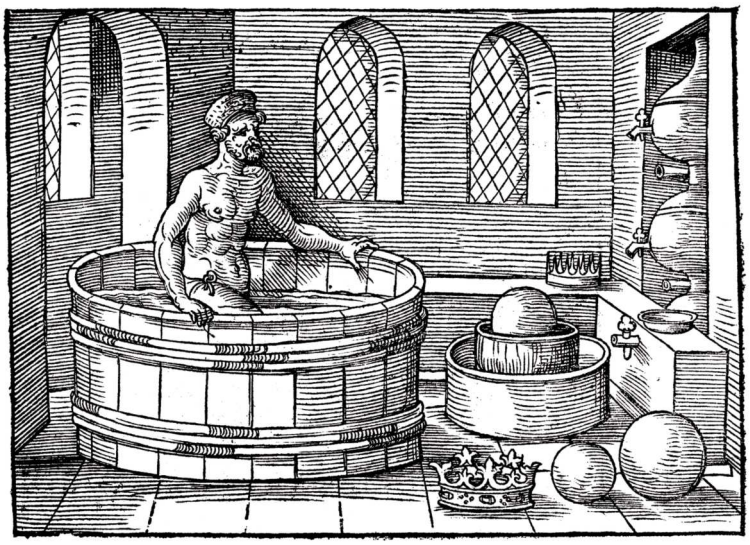
Solución:

El cilindro está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas: el empuje del agua $\vec{E}$ (hacia arriba), su peso $\vec{P}$ (hacia abajo), y la tensión de la soga $\vec{T}$ (hacia abajo):

$$E - P - T = 0 \Rightarrow T = E - P$$

$$T = \delta_{agua} \cdot g \cdot V_{sumergido} - \delta_{cilindro} \cdot g \cdot V_{cilindro} = (\delta_{agua} \cdot V_{sumergido} - \delta_{cilindro} \cdot V_{cilindro}) \cdot g =$$

$$= (1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 1 m^3 - 100 \frac{kg}{m^3} \cdot 2 m^3) \cdot 10 \frac{m}{s^2} = 8000 N$$



De acuerdo a Vitruvio, arquitecto de la antigua Roma, Hierón II, tirano gobernador de Siracusa, le pidió a Arquímedes determinar si una nueva corona con forma de corona triunfal había sido fabricada con oro sólido o si el orfebre que creía deshonesto le había agregado plata. Arquímedes tenía que resolver el problema sin dañar la corona, (ya que su vida estaba en juego) así que no podía fundirla y convertirla en un cuerpo regular para calcular su densidad. Mientras tomaba un baño, notó que el nivel de agua subía en la bañadera cuando entraba, y así se dio cuenta de que ese efecto podría usarse para determinar el volumen de la corona. Debido a que la compresión del agua sería despreciable, la corona, al ser sumergida, desplazaría una cantidad de agua igual a su propio volumen. Al dividir la masa de la corona por el volumen de agua desplazada, se podría obtener la densidad de la corona. La densidad de la corona sería menor si otros metales más baratos y menos densos le hubieran sido añadidos. Entonces, Arquímedes, tan emocionado estaba por su descubrimiento que salió corriendo desnudo por las calles, gritando "¡Eureka!" (¡Lo he encontrado!, en griego antiguo).

Actividad. La muerte de las ballenas

¿Cuál es la causa de la muerte de las ballenas que quedan varadas en la playa?

a) Se les seca la piel por la falta de contacto con el agua.

b) Mueren de tristeza al quedar separadas de sus semejantes.

c) La falta de alimento.

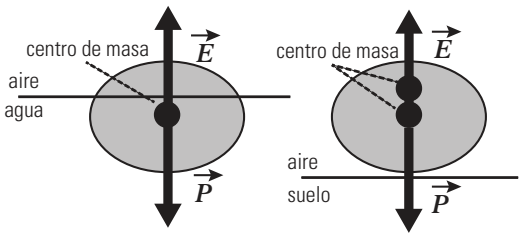
d) La radiación ultravioleta del sol les produce daños en la piel.

e) No pueden respirar porque sus branquias no funcionan fuera del agua.

f) No tienen la fuerza suficiente para inflar sus pulmones.

Solución:

La respuesta correcta es la (f). La ballena es un mamífero, tiene pulmones, y respira de una manera semejante a nosotros. Para inflar sus pulmones tiene que expandir el tórax mediante la acción muscular. En el agua no tiene dificultad porque al expandir el tórax, puede desplazar el agua que tiene debajo y su centro de masa permanece más o menos en el mismo lugar (en realidad sube un poco porque aumenta el empuje). En la playa, al estar apoyada sobre el suelo, no puede desplazar el suelo hacia abajo, con lo que para poder expandir el tórax tiene que elevar su centro de masa: eso implica una fuerza enorme que excede sus posibilidades musculares: la causa de la muerte es la asfixia. La situación se ilustra a continuación:



Prohibida la reproducción total o parcial de este material sin el permiso de la cátedra.

UNIDAD 3 LEYES DE CONSERVACION

CAPITULO 1 TRABAJO Y ENERGIA

1.1 INTRODUCCION

En dinámica nos hemos ocupado de la partícula y las acciones que se ejercen sobre ella: las fuerzas.

Bajo la acción de las fuerzas, la segunda ley de Newton nos indica que la partícula cambia su vector velocidad, esto es, adquiere una aceleración:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

que expresado de otra manera

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}\,\Delta t = m\,\Delta\vec{v}$$

Esto nos indica que una fuerza aplicada durante un cierto intervalo de tiempo, produce cambios en la velocidad de la partícula. Si conocemos la fuerza actuante y el intervalo de tiempo durante el cual actuó, podemos conocer las nuevas variables cinemáticas, posición y velocidad al cabo de ese intervalo de tiempo.

Si $\vec{F}$ es constante y el movimiento es rectilíneo será entonces uniformemente variado y podemos escribir su ecuación horaria.

Pero, en general, en la naturaleza no encontramos con frecuencia fuerzas constantes, ya sea porque varían a lo largo del tiempo, o bien porque su valor depende de la posición de la partícula. En estos casos no es inmediatamente posible obtener la evolución del movimiento de la partícula a partir de la segunda ley de Newton, en la Unidad 2, sólo hemos trabajado con fuerzas constantes, como el peso, o bien en posiciones bien determinadas e instantáneas.

Pensemos en lo difícil que sería obtener la ley de variación de la fuerza de interacción entre una pelota de tenis y una pared (según lo que aprendimos, poniendo un dinamómetro entre ambas...) o bien conocer las interacciones a niveles subatómicos.

Pero podemos definir nuevas magnitudes físicas que nos permitan abarcar estos fenómenos desde otro ángulo y que igualmente nos permitan conocer la evolución de una partícula (o un conjunto de ellas) como consecuencia de las interacciones a las cuales está sometida por la comparación de estados iniciales (posición y velocidad inicial) con estados finales (posición y velocidad final), sin hacer caso a los detalles de la interacción misma.

Así es que vamos a derivar, como leyes globales del movimiento (y a partir de las leyes de Newton), ecuaciones conocidas como leyes de conservación.

Para cada una de estas leyes se define una nueva magnitud física que involucra las variables cinemáticas cuyo valor queda fijo e invariable a lo largo del proceso de interacción, por las condiciones cinemáticas iniciales de la partícula (o del conjunto de ellas).

La importancia de la validez de las leyes de conservación es que nos permite resolver problemas de movimiento bajo la acción de un conjunto de fuerzas en forma global, en lugar de hacerlo instante a instante a lo largo de la trayectoria, dichas leyes son las siguientes:

- Conservación de la energía.
- Conservación de la cantidad de movimiento.
- Conservación de la cantidad de movimiento angular.

Estas tres magnitudes han resultado ser de particular importancia en una gran variedad de campos de la física que van más allá de la mecánica clásica de lo cual nos ocuparemos en este curso (nos referimos a la física atómica y nuclear).

1.2 TRABAJO Y ENERGIA CINETICA

Pensemos, como ejemplo, en el movimiento que realiza un cuerpo en contacto con un resorte que se halla comprimido, apoyado sobre un plano, con rozamiento despreciable, del cual queremos saber con qué velocidad abandonó el resorte cuando este recuperó su longitud original:

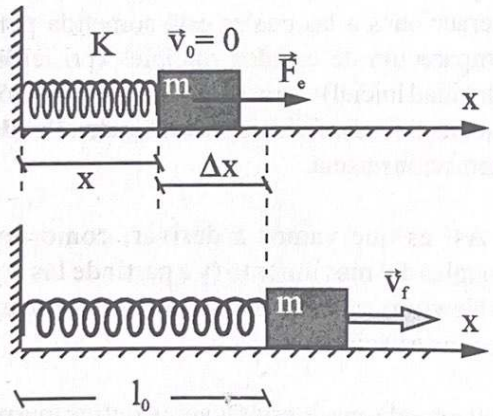


Fig. 1.1

Si suponemos que ese resorte es lineal (que cumple la ley de Hooke), la fuerza con que actúa sobre el cuerpo es

$$F = - K \Delta x = - K (x - l_0) = K (l_0 - x)$$

donde lo es la longitud del resorte cuando no está deformado. Si aplicamos la segunda ley al movimiento del cuerpo:

$$F = m\,a \Rightarrow K (l_0 - x) = m\,a$$

(movimiento rectilíneo a lo largo de $\hat{x}$), de donde:

$$a = \frac{K}{m} (l_0 - x)$$

La aceleración depende linealmente de la posición (igual que la fuerza), y podemos graficarla. Observe que la aceleración es positiva para $x < l_0$ (compresión del resorte), negativa para $x > l_0$ (estiramiento) y nula para $x = l_0$ (resorte en posición neutra).

Para $x = x_0 = l_0 - \Delta x$ el cuerpo se acelera en el sentido positivo del eje x con $a = (K/m)\,\Delta x$.

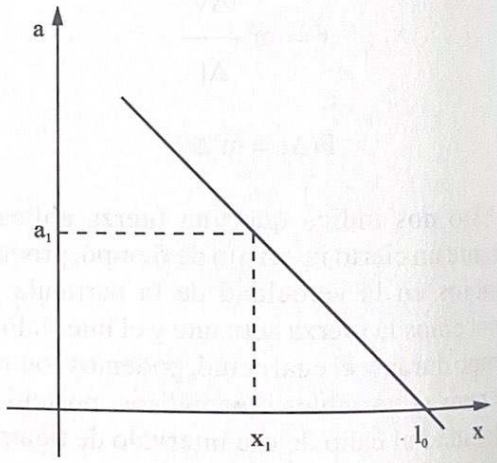


Fig. 1.2

¿Cómo determinar la velocidad instantánea al final del recorrido si $|\vec{a}|$ no es constante?. No hemos estudiado hasta ahora más que movimientos con $|\vec{a}| = cte$.

Desde luego no es imposible responder la pregunta, pero requerirá de mayores conocimientos matemáticos y si la aceleración variara en forma

aun más irregular, realmente sería muy complicado responder cuánto vale la velocidad final.

Veremos enseguida cómo resolver con facilidad este problema. Pero antes mostraremos el método con un caso más sencillo:

Supongamos que desde un sistema inercial se observa una partícula en equilibrio sobre la que no actúa fuerza alguna (se mueve con movimiento rectilíneo uniforme).

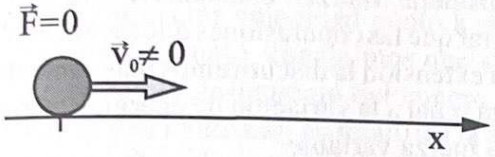


Fig. 1.3

Si le aplicamos en la dirección de la velocidad una fuerza constante en módulo, dirección y sentido, describirá un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

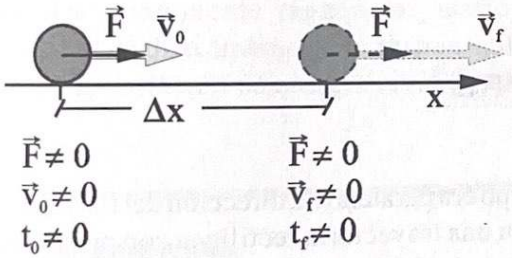


Fig. 1.4

Esto es, el movimiento quedará descripto por la ecuación horaria del MRUV:

$$x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

Hagamos un poco de álgebra: si la aceleración es

$$a = \frac{v_f - v_0}{\Delta t}$$

El desplazamiento en este MRUV será:

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \Rightarrow$$

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} \frac{(v_f - v_0)}{\Delta t} \Delta t^2$$

o sea

$$\Delta x = \frac{1}{2} (v_f + v_0) \Delta t$$

Por otra parte, dado que $v_f = v_0 + a\Delta t$, a medida que aumenta el lapso Δt bajo la acción de la fuerza constante F, aumentan Δx y v_f. Existe una relación sencilla entre estas magnitudes:

$$F \Delta x = m\, a\, \Delta x = m \frac{(v_f - v_0)}{\Delta t} \frac{1}{2} (v_f + v_0) \Delta t$$

$$F \Delta x = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_0^2)$$

donde F indica el módulo de la fuerza $\vec{F}$, o sea:

$$F \Delta x = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2,$$

ya no figura el tiempo.

El producto de la fuerza por el desplazamiento del cuerpo bajo su acción resulta de la diferencia de dos cantidades de igual naturaleza, que dependen de las velocidades inicial y final del cuerpo en ese desplazamiento.

Esto nos sugiere que, al revés, si tenemos posibilidad de medir la velocidad de una partícula al comienzo y al final de un cierto trayecto, podemos, por simple diferencia de sus valores elevados al cuadrado y multiplicados por la mitad de su masa, evaluar ese producto $F \Delta x$ sin conocer necesariamente el valor de F.

Estas cantidades han resultado de gran utilidad y han merecido nombre propio:

$$F\,\Delta x = L_{\vec{F}} \qquad \textbf{Trabajo de la fuerza } \vec{F}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = Ec \qquad \textbf{Energía cinética del cuerpo.}$$

y podemos decir de ellas que la acción continuada de una fuerza aplicada en la misma dirección y con el mismo sentido que la velocidad modifica una magnitud física asociada al estado cinemático de la partícula (que llamamos energía cinética) en forma proporcional al desplazamiento realizado y a la intensidad de la fuerza.

La deducción que hemos hecho se limitó a considerar fuerzas constantes, a lo largo de trayectorias continuas. Sin embargo se puede demostrar que las conclusiones que hemos extraído se pueden extender a una situación más general. Esta extensión la discutiremos más adelante, en la sección 1.5, y la conclusión será que el trabajo será igual a la variación de energía cinética en todos los casos, aunque la trayectoria sea curva y la fuerza variable.

Esta relación se conoce con el nombre de:

Teorema del trabajo y la energía cinética $\qquad L_{\vec{F}} = \Delta Ec$

Por tanto, si sabemos calcular el trabajo realizado por una fuerza o un sistema de ellas, esto nos permite conocer la velocidad final, conocida la inicial. Dedicaremos las próximas secciones al cálculo de trabajos mecánicos en situaciones más complejas que la considerada arriba.

1.3 TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE

En el ejemplo anterior la fuerza aplicada sobre el cuerpo era paralela a la dirección del movimiento. En general, para una trayectoria cualquiera, o aún en una trayectoria rectilínea con presencia de otras fuerzas, las direcciones de los vectores fuerza y velocidad para un instante dado pueden no coincidir. Veremos cómo definir el trabajo de la fuerza, supuesta constante, en estas circunstancias.

Ejemplo 1.1:

En el movimiento circular uniforme, un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza centrípeta, de modo que en todo punto de la trayectoria circular la fuerza es perpendicular a la velocidad (ver **Fig. 1.5**). ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza centrípeta en este movimiento?

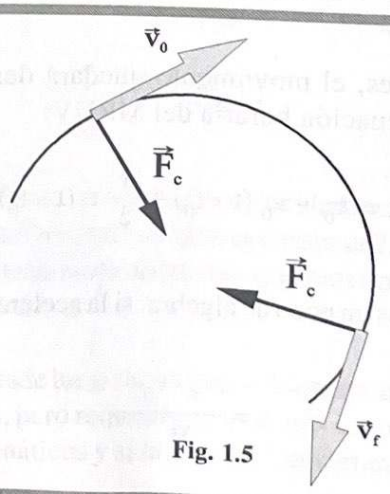


Fig. 1.5

Ejemplo 1.1:

Como antes, tomemos dos posiciones para los instantes t_0 *y* t_f, *con velocidades* $\vec{v}_0$ *y* v_f *respectivamente, y calculemos el trabajo de* $\vec{F}$ *con* ***el teorema trabajo y energía cinética.***

$$L_{\vec{F}c} = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Pero, en un MCU, el módulo de la velocidad es constante,

$$v_f = v_0 \Rightarrow \Delta Ec = 0, \; L_{\vec{F}c} = 0.$$

Resulta pues que la fuerza centrípeta no realiza trabajo: su efecto es modificar la dirección de la velocidad pero no su magnitud. Este efecto ocurre siempre que la fuerza aplicada sea perpendicular al vector velocidad punto a punto. Como el vector velocidad es tangente a la trayectoria punto a punto, concluímos que una fuerza aplicada perpendicular a la trayectoria durante un dado desplazamiento del cuerpo no realiza trabajo, o lo que es lo mismo, no modifica la energía del cuerpo, y no cambia el módulo de la velocidad.

En general, la fuerza aplicada sobre un cuerpo que realiza un movimiento cualquiera es oblicua respecto a la trayectoria, es decir, puede descomponerse punto a punto en una componente tangencial (paralela a la velocidad en ese punto) y una componenete normal o centrípeta (perpendicular a la velocidad).

La componente normal, como hemos visto, no realiza trabajo. La componente tangencial, como veremos enseguida, sí realiza trabajo y es responsable, por así decirlo, de la variación de energía cinética del cuerpo.

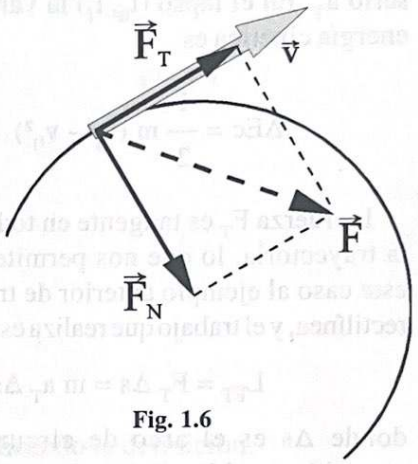
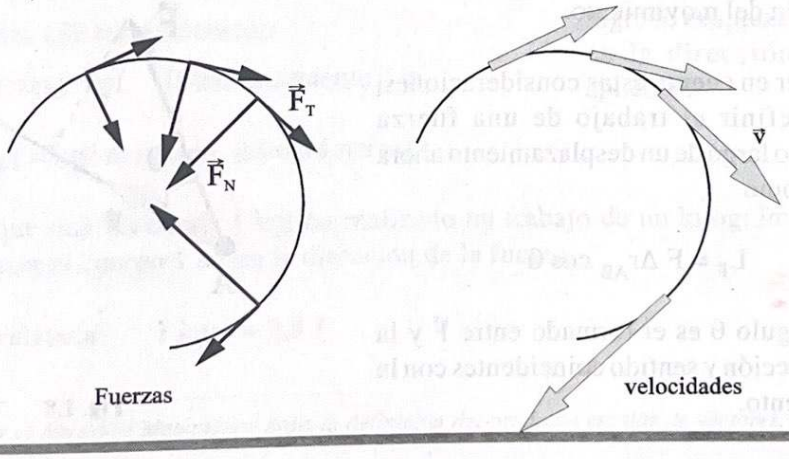


Fig. 1.6

Ejemplo 1.2:

En la **Fig. 1.7** el móvil describe una trayectoria circular, tal que su velocidad crece uniformemente (movimiento circular uniformemente variado)



Ejemplo 1.2:

$$v(t) = a_T\, t \;\Rightarrow\; v_0 = a_T\, t_0$$

$$v_f = a_T\, t_f$$

Sobre el cuerpo actúa una fuerza oblicua de componentes de acuerdo a la segunda ley:

$$F_N = \frac{m\, v^2}{R} \quad ; \quad F_T = m\, a_T$$

y se observa que F_N varía con el tiempo al hacerlo v, mientras que F_T es constante al serlo a_T. En el lapso (t_0, t_f) la variación de energía cinética es

$$\Delta Ec = \frac{1}{2}\, m\, (v_f^2 - v_0^2)$$

La fuerza F_T es tangente en todo punto a la trayectoria, lo que nos permite asimilar este caso al ejemplo anterior de trayectoria rectilínea, y el trabajo que realiza es entonces:

$$L_{\vec{F}T} = F_T\, \Delta s = m\, a_T\, \Delta s$$

donde Δs es el arco de circunferencia recorrido en el lapso $\Delta t = (t_f - t_0)$:

$$\Delta s = v_0\, \Delta t + \frac{1}{2}\, a_T\, \Delta t^2$$

(estamos utilizando la cinemática escalar para rectificar el movimiento curvo). Si procedemos como en el ejemplo anterior.

$$a_T = \frac{v_f - v_0}{\Delta t}, \quad \text{y} \quad \Delta s = \frac{v_0 + v_f}{2}\, \Delta t$$

$$L_{\vec{F}T} = \frac{1}{2}\, m\, (v_f - v_0)\, \frac{1}{2}\, (v_f + v_0)$$

$$L_{\vec{F}T} = \frac{1}{2}\, m\, v_f^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

y entonces

$$L_{\vec{F}T} = \Delta Ec$$

El trabajo de la componente tangencial es así igual a la variación de la energía cinética del cuerpo.

Resulta entonces que en el caso de una fuerza oblicua respecto de la dirección de movimiento sólo realiza trabajo (modifica la energía cinética del cuerpo) la componente de la fuerza paralela a la dirección del movimiento.

Para tener en cuenta estas consideraciones, vamos a definir el trabajo de una fuerza constante a lo largo de un desplazamiento ahora rectilíneo como

$$L_{\vec{F}} = F\, \Delta r_{AB} \cos\theta$$

donde el ángulo θ es el formado entre $\vec{F}$ y la recta de dirección y sentido coincidentes con la del movimiento.

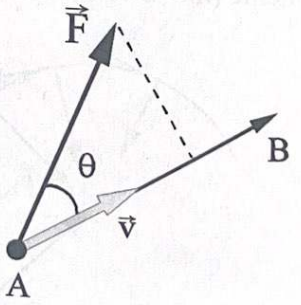


Fig. 1.8

Observe que F cosθ es la magnitud de la componente de $\vec{F}$ paralela a la dirección del movimiento. El precisar acerca del sentido del movimiento nos dice que θ es el ángulo entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{v}$. Si $\theta < 90°$, la componente tangencial de $\vec{F}$ y v tienen el mismo sentido: el móvil se acelera y aumenta su energía cinética; por la otra parte cos θ es positivo y el trabajo también lo es, en coincidencia con el aumento de la energía cinética.

Si $\theta > 90°$, la componente tangencial de $\vec{F}$ se opone a v; el móvil se frena y su energía cinética disminuye; como además $\cos\theta < 0$ en este caso, el trabajo es negativo, nuevamente de acuerdo con la variación - ahora negativa - de energía cinética. Por lo tanto es necesario definir el ángulo θ como lo hemos hecho para mantener el teorema trabajo - energía.

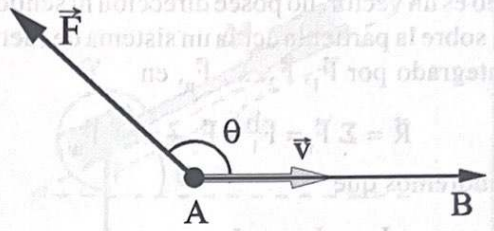


Fig. 1.9

Con ayuda de la notación vectorial, podemos decir que se trata del producto escalar entre el vector fuerza aplicada $\vec{F}$ y el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$:

$$L_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}|\cos\theta \qquad (*)$$

donde $\Delta\vec{r}$ tiene la dirección y sentido del movimiento.

1.3.1 UNIDADES

La unidad de trabajo se deriva de las fundamentales aplicando la definición.

Sistema **M K S**:

[Fuerza]: N ; [Desplazamiento]: m

$$[L_{\vec{F}}] = \text{N m} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = \text{J (Joule)}$$

Aclaración: los corchetes se leen como "unidades de". Se dice que una fuerza de 1 N ha realizado un trabajo de 1 Joule cuando ha logrado desplazar el cuerpo 1 m, en la dirección de la fuerza aplicada.

Si se utiliza (Sistema Técnico):

[Fuerza]: kgf, [Desplazamiento]: m

$[L_F] = \text{kgf m} = \text{kgm}$ (kilográmetro)

Se dice que una fuerza de 1 kgf ha realizado un trabajo de un kilográmetro cuando ha logrado desplazar el cuerpo 1 m, en la dirección de la fuerza.

Equivalencia: 1 kgm = 9,8 J

---

* *Puede consultar el Apéndice Matemático para la definición del producto escalar de vectores.*

1.4 TRABAJO DE UN SISTEMA DE FUERZAS

Cuando hay más de una fuerza que actúa sobre la partícula, habremos de calcular por separado el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan y luego sumarlos, o de modo equivalente, calculamos directamente el trabajo de la fuerza resultante $\vec{R}$

Puesto que el trabajo es una magnitud escalar (no es un vector, no posee dirección ni sentido), si sobre la partícula actúa un sistema de fuerzas integrado por $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, en

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

tendremos que

$$L_{\vec{R}} = L_{\vec{F}1} + L_{\vec{F}2} + ... + L_{\vec{F}n}$$

El trabajo de la resultante de varias fuerzas aplicadas a la misma partícula es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas componentes.

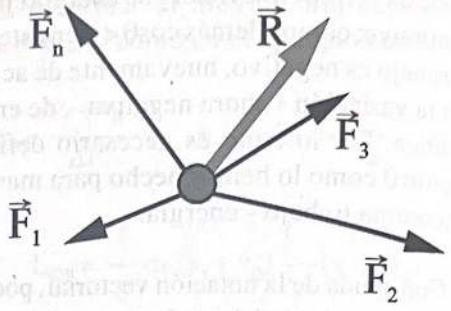


Fig. 1.10

Ejemplo 1.3:

Un cuerpo de masa m = 1 kg asciende por un plano inclinado un ángulo θ de 30° bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ tal que realiza un MRU. Calcular el trabajo de cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo si asciende hasta una altura de 1 m. Calcular el trabajo total realizado sobre el cuerpo.

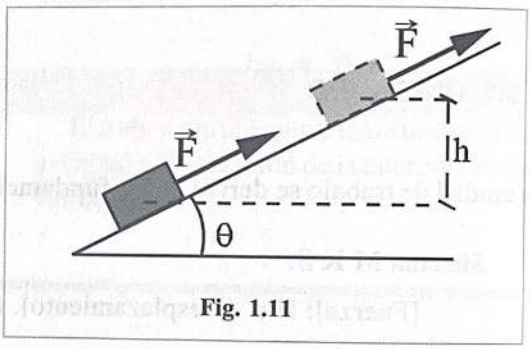


Fig. 1.11

1 - Diagrama de cuerpo desvinculado

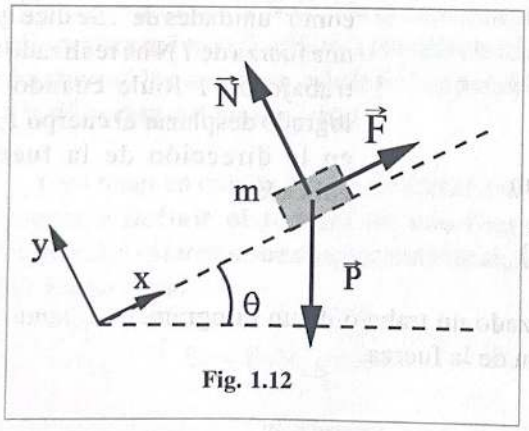


Fig. 1.12

El desplazamiento ($\Delta\vec{r}$) del cuerpo o la distancia (d) que recorre, a lo largo del plano es

$$d = \frac{h}{\text{sen } \theta} = \frac{1 \text{ m}}{\text{sen } 30°} = 2 \text{ m}$$

Si el movimiento se realiza a velocidad constante, significa que

$$\Sigma Fx = 0 \Rightarrow F - mg \text{ sen } \theta = 0$$

$$F = m\, g \text{ sen } \theta$$

$$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow N - P \cos \theta = 0$$

$$N = P \cos \theta$$

Ejemplo 1.3:

2 - Calculemos los trabajos de cada fuerza:

$L_{\vec{F}} = m\ g\ \text{sen}\ \theta\ d\ \cos 0°$

$= 1\ \text{kg}\ 10\ \text{m/s}^2\ 0{,}5\ .\ 2\ \text{m}\ .\ 1$

$\boxed{L_{\vec{F}} = 10\ \text{J}}$

$L_{\vec{P}} = m\ g\ d\ \cos \theta'$

$= 1\ \text{kg}\ 10\ \text{m/s}^2\ 2\ \text{m}\ (-0{,}5)$

$\boxed{L_{\vec{P}} = -\ 10\ \text{J}}$

$L_{\vec{N}} = m\ g\ \cos\theta\ d\ \cos 90°$

$\boxed{L_{\vec{N}} = 0\ \text{J}}$

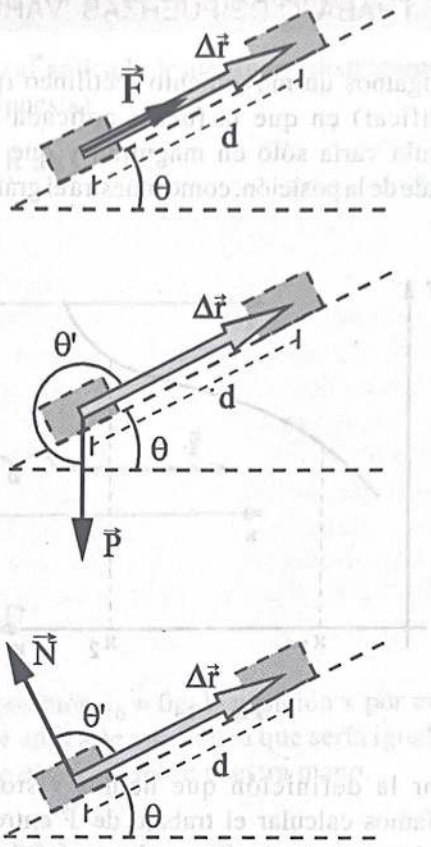


Fig. 1.13

$$\Sigma L = L_{\vec{F}} + L_{\vec{P}} + L_{\vec{N}} = 10\ \text{J} - 10\ \text{J} + 0 = 0$$

Resultado esperado, puesto que si el movimiento es uniforme, significa que

$$\Sigma \vec{F} = \vec{R} = 0 \ \Rightarrow\ L_{\vec{R}} = 0$$

Conclusión que, por otra parte, podríamos haber obtenido en forma inmediata recurriendo al teorema del trabajo y la energía cinética, puesto que al ser la velocidad constante, implicaría que no hay variación de energía cinética del cuerpo, eso indicaría que el trabajo de la fuerza resultante (trabajo neto) sobre el cuerpo es nulo. Habría bastado este simple razonamiento para evitarnos los cálculos.

1.5 TRABAJO DE FUERZAS VARIABLES

Supongamos un movimiento rectilíneo (para simplificar) en que la fuerza aplicada a la partícula varía sólo en magnitud y que ésta depende de la posición, como muestra el gráfico.

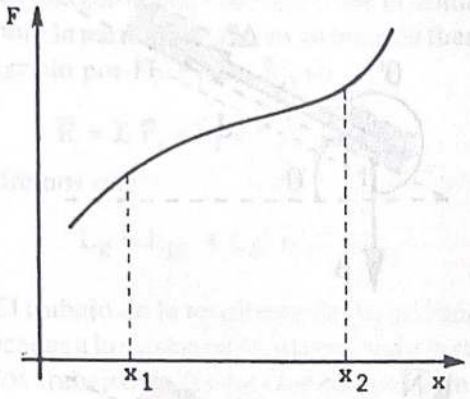


Fig. 1.14

Por la definición que hemos visto, no podríamos calcular el trabajo de $\vec{F}$ entre las posiciones x_1 y x_2. Sin embargo, podemos recurrir a este artificio de integración: suponer pequeños desplazamientos $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, etc., que sumados representen $\Delta x = x_2 - x_1$ tales que, en cada pequeño desplazamiento podemos aproximar la $\vec{F}$ a un valor considerado constante (promedio entre el valor al comienzo y al final de cada intervalo).

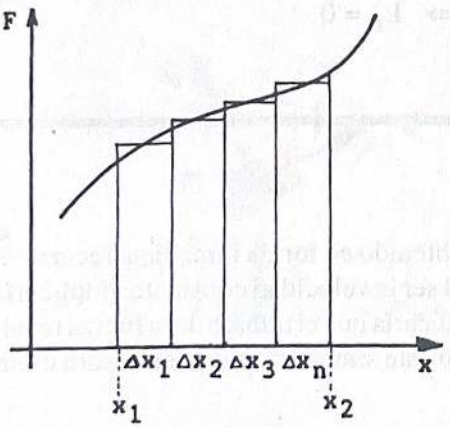


Fig. 1.15

En cada intervalo se realizará un trabajo que definimos para fuerzas constantes

$$L_{\vec{F}} = F\,\Delta x$$

tal que

$$\Delta L_1 = F_1\,\Delta x_1$$

$$\Delta L_2 = F_2\,\Delta x_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta L_3 = F_3\,\Delta x_3$$

El trabajo total realizado entre x_1 y x_2 será la suma de todos los trabajos parciales

$$L_{\vec{F}} = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \ldots$$

$$L_{\vec{F}} = \Sigma\, F_i\, \Delta x_i$$

Para lograr mayor precisión, bastará con achicar cada vez más los intervalos en que se ha subdividido el desplazamiento Δx a fin de asegurar menor variación de la función en cada uno de ellos.

Esto es, para intervalos que tienden a cero, podemos escribir

$$L_{\vec{F}} = \lim_{\Delta x \to 0} \Sigma\, F_i\, \Delta x_i$$

Si observamos el gráfico, podemos constatar que la suma de todos los productos $F_i \Delta x_i$, o sea la $\Sigma F_i\, \Delta x_i$ representa geométricamente con buena aproximación el área debajo de la curva entre los valores x_1 y x_2, expresada en las unidades de las escalas empleadas.

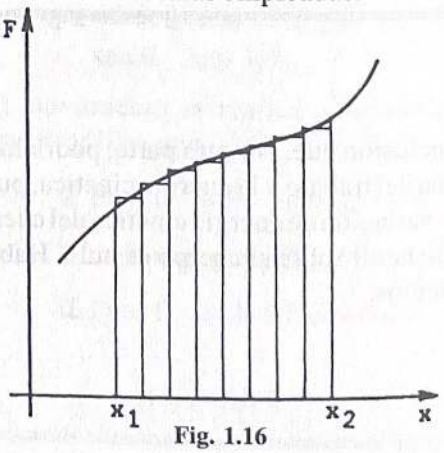


Fig. 1.16

Esto nos da una herramienta práctica para calcular trabajos de fuerzas variables.

Retomemos el ejemplo del resorte al que estira una fuerza $\vec{F}$ aplicada desde afuera (distingamos entre una fuerza y la que hace el propio resorte que es opuesta)

$$|\vec{F}| = F = K\,\Delta x$$

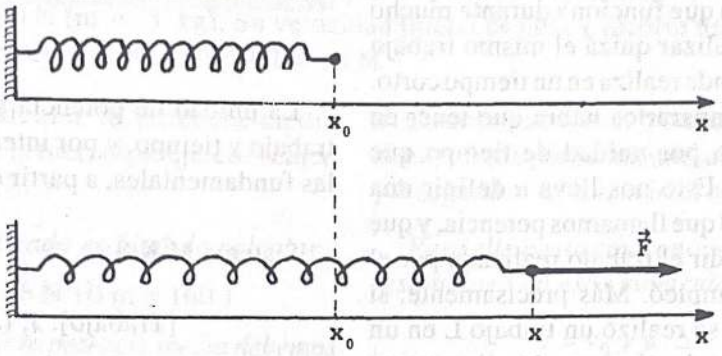


Fig. 1.17

Si quisiéramos calcular el trabajo realizado entre la posición $x_0 = 0$ y la posición x por una fuerza $\vec{F}$ aplicada al resorte para estirarlo tendríamos que aplicarle una fuerza que sería igual y contraria a la fuerza elástica de restitución que el resorte ejercería sobre nuestra mano.

$$F = m\,a \Rightarrow F = k\,x$$

cuya gráfica sería, si se trata de un resorte hookeano lineal:

Como dijimos, el trabajo es el área bajo la curva,

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}\ \text{base} \cdot \text{altura}$$

$$L_F = [\text{Area}] = \tfrac{1}{2}\,x \cdot K\,x$$

$$L_F = \tfrac{1}{2}\,K\,x^2$$

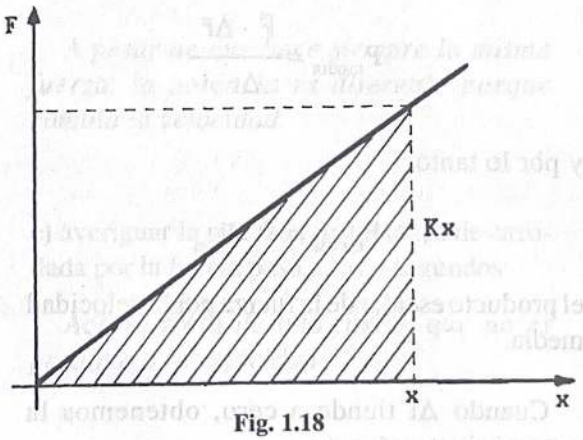


Fig. 1.18

Este trabajo siempre es positivo, tanto al estirarlo como al comprimirlo, ya que depende de x^2, que será positivo independientemente del signo de x. En términos físicos, el trabajo de la fuerza que deforma al resorte es siempre positivo porque se lo estira o comprime, la fuerza siempre tiene el mismo sentido que el desplazamiento.

Esta expresión, veremos más adelante, también recibe su nombre propio, energía potencial elástica, y se mide en Joule. Es el resultado del trabajo realizado sobre el resorte y depende del valor absoluto del estiramiento o compresión.

1.6 POTENCIA

A menudo es útil al calcular un trabajo tener en cuenta el tiempo que lleva realizarlo. Es claro que un motorcito que funciona durante mucho tiempo puede realizar quizá el mismo trabajo que un motor grande realiza en un tiempo corto. Si queremos compararlos habrá que tener en cuenta el trabajo por unidad de tiempo que pueden realizar. Esto nos lleva a definir una nueva magnitud que llamamos potencia, y que proviene de dividir el trabajo realizado por el tiempo que se empleó. Más precisamente, si sobre un cuerpo se realizó un trabajo L en un cierto intervalo de tiempo Δt, llamamos **potencia media** en ese intervalo al cociente:

$$P_{media} = \frac{L}{\Delta t}$$

Para el caso de un tramo recto y fuerza constante, es

$$L = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

y tendremos

$$P_{media} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

y por lo tanto

$$P_{media} = \vec{F} \cdot \vec{v}_m$$

el producto escalar de la fuerza por la velocidad media.

Cuando Δt tiende a cero, obtenemos la potencia instantánea:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = |\vec{F}|\,|\vec{v}| \cos\theta$$

que relaciona la potencia instantánea con la velocidad instantánea.

1.6.1 UNIDADES

La unidad de potencia se deriva de las de trabajo y tiempo, y por intermedio de ellas, de las fundamentales, a partir de la definición:

Sistema M K S:

[Trabajo]: J, (Joule)

[Tiempo]: s, (segundo)

$$[\text{Potencia}] = \frac{J}{s} = \frac{N\,m}{s} = \text{watt}$$

1 watt es entonces la potencia desarrollada por una fuerza que realiza un trabajo de 1 J en un tiempo de 1 s.

Estime, como ejercicio, cuántos watt de potencia puede desarrollar un ser humano.

Otras unidades: si se mide el trabajo en kgf m, y el tiempo en s, la unidad de potencia es el kgf m/s;

1 kgf m/s = 9,8 watt

Otra unidad muy utilizada es el HP, equivalente a 76 kgf m/s. Si una persona de 76 kg sube una escalera a 1 m/s, desarrolla una potencia de un caballo.

Ejemplo 1.4:

Un chico arrastra un carrito cuesta arriba por un plano, sin rozamiento, inclinado a 30°. El carrito pesa 30 N (m = 3 kg). Su velocidad inicial es nula y recorre una distancia de 10 m; si el chico ejerce una fuerza |F| = 16 N,

a) Se desea calcular la potencia media desarrollada por la fuerza que ejerce el chico en ese trayecto:

El trabajo realizado es fácil de calcular:

$$L = 16\ N\ 10\ m = 160\ J$$

Para calcular la potencia media debemos hallar el tiempo que tarda en subir. Para ello averiguaremos la aceleración:

$$F - P \operatorname{sen}\theta = m\ a$$

$$16\ N - 30\ N \operatorname{sen} 30° = 3\ kg\ a$$

$$a = \frac{16\ N - 15\ N}{3\ kg} \approx 0{,}33\ m/s^2$$

Ahora podemos averiguar el tiempo

$$\Delta x = v_0\ \Delta t + \frac{1}{2}\ a\ \Delta t^2$$

$$10\ m = 0 + \frac{1}{2}\ 0{,}33\ m/s^2\ \Delta t^2$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\ m}{0{,}33\ m/s^2}} = \sqrt{60\ s^2} \approx 7{,}75\ s$$

por lo tanto

$$P_{media} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{160\ J}{7{,}7\ s}$$

$$\boxed{P_{media} = 20{,}6\ watt}$$

b) Calcular también la potencia instantánea desarrollada por la misma fuerza, a los 2; 4 y 6 segundos de iniciado el ascenso.

Para ello basta con conocer la velocidad instantánea en esos momentos:

$$v = v_0 + a\ \Delta t$$

a los 2 s: $v = 0{,}33\ m/s^2\ 2\ s = 0{,}66\ m/s$

a los 4 s: $v = 0{,}33\ m/s^2\ 4\ s = 1{,}32\ m/s$

a los 6 s: $v = 0{,}33\ m/s^2\ 6\ s = 1{,}98\ m/s$

La potencia instantánea será ($P = \vec{F} \cdot \vec{v}$):

a los 2 s: $P = 16\ N\ 0{,}66\ m/s = 19{,}56\ watt$

a los 4 s: $P = 16\ N\ 1{,}32\ m/s = 21{,}12\ watt$

a los 6 s: $P = 16\ N\ 1{,}98\ m/s = 31{,}68\ watt$

A pesar de que hace siempre la misma fuerza, la potencia es diferente porque cambia la velocidad.

c) averiguar la potencia instantánea desarrollada por la fuerza peso a los 4 segundos:

Acá se trata de una fuerza que no es paralela a la velocidad:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}|\ |\vec{v}| \cos 120° =$$

$$= 30\ N\ 1{,}32\ m/s\ (-0{,}5)$$

$$\boxed{P = -19{,}8\ watt}$$

CAPITULO 2 ENERGIA MECANICA

2.1 FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

Hemos visto que el trabajo L realizado por una fuerza resultante que actúa sobre una partícula es igual a la variación de energía cinética ΔEc de la partícula:

$$L = \Delta Ec$$

Para el caso de una partícula la fuerza resultante es la suma de varias fuerzas F_i aplicadas sobre la partícula, $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_i + ...$. En mecánica clásica resulta útil considerar estas fuerzas divididas en dos tipos: **conservativas** y **no conservativas** o **disipativas**. A su vez los trabajos L_i podrán, de la misma manera, ser clasificados como provenientes de fuerzas de uno u otro tipo. Podemos entonces reescribir la ecuación anterior

$$L_c + L_{nc} = \Delta Ec$$

Siendo L_c el trabajo de las fuerzas conservativas y L_{nc} el trabajo de las fuerzas no conservativas. A medida que avancemos, veremos la utilidad de esta distinción. Veamos ahora un ejemplo.

Ejemplo 2.1:

Consideremos una partícula de masa m, cerca de la superficie de la Tierra, queremos calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria a lo largo de la trayectoria, indicada en la figura, que une los puntos A y B.

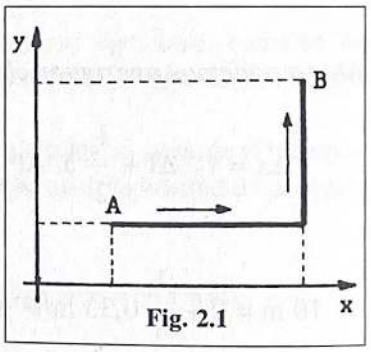


Fig. 2.1

El trabajo, que designaremos L_{AB} será:

$$L_{AB} = mg\,(x_B - x_A)\cos 90° + mg\,(y_B - y_A)\cos 180°$$

trayecto horizontal — trayecto vertical

Como $\cos 90° = 0$, la fuerza no realiza trabajo en el trayecto horizontal, de donde

$$L_{AB} = -\,mg\,(y_B - y_A)$$

Este es un resultado muy peculiar, ya que el trabajo en este caso depende de las ordenadas de los puntos final e inicial.

Veamos si este resultado es general; consideremos para ello una trayectoria cualquiera que pensamos compuesta de pequeñas trayectorias alternadamente horizontales y verticales como se indica en la ampliación de la **Fig. 2.2**.

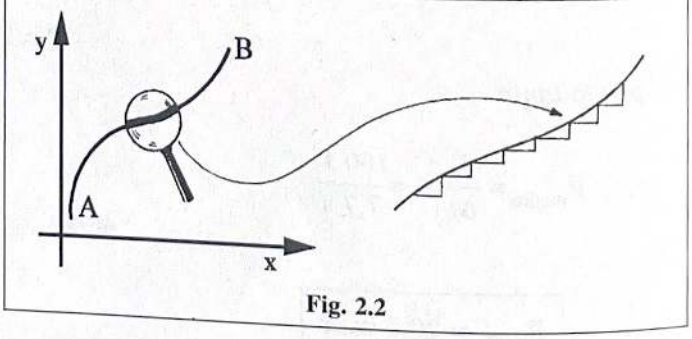


Fig. 2.2

Para ellas ya sabemos calcular el trabajo. De esta manera el trabajo total será la suma de las diferentes contribuciones

$$L_{AB} = L_{A1} + L_{12} + \ldots + L_{nB} =$$
$$= - mg\,(y_1 - y_A) - mg\,(y_2 - y_1) - \ldots - mg\,(y_B - y_n)$$

donde los subíndices representan los diversos triángulos en que hemos dividido la trayectoria. Se puede comprobar fácilmente (trate de hacerlo) que las contribuciones horizontales son nulas y las verticales suman el valor $(y_B - y_A)$, y así:

$$L_{AB} = - mg\,(y_B - y_A)$$

En el límite de escalones cuyo tamaño tiende a cero nuestra trayectoria coincidirá con la elegida inicialmente, que es arbitraria. Concluímos entonces que para la fuerza gravitatoria el trabajo realizado entre dos puntos A y B es independiente de la trayectoria elegida y es sólo función de los puntos inicial y final. En particular para una trayectoria cerrada

$$L_{\text{trayectoria cerrada}} = 0$$

Esta propiedad que tiene la fuerza gravitatoria, se extiende como definición general de fuerzas conservativas, como sigue:

Una fuerza es **conservativa** cuando el trabajo realizado por ella a lo largo de una trayectoria cerrada es **cero**. Asimismo diremos que una fuerza es **no conservativa** si el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada es **distinto de cero.**

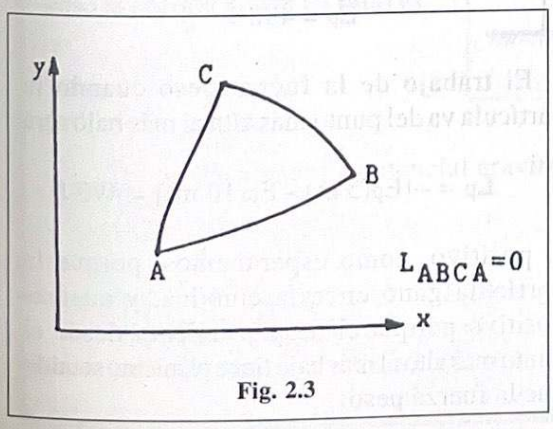


Fig. 2.3

Consideremos ahora el caso de un resorte deformado por una fuerza aplicada. El trabajo realizado por la fuerza elástica en la deformación (compresión o estiramiento) es:.

$$L_{Fe} = \frac{1}{2} K\,[\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2] = \frac{1}{2} K\,[(x_2 - l_o)^2 - (x_1 - l_o)^2]$$

donde x_2 es la posición final y x_1 es la posición inicial del extremo libre del resorte y l_o es la longitud del resorte relajado. Si en particular en l_o se elige el origen de coordenadas $l_o = 0$, la expresión que permite calcular el trabajo de la fuerza elástica será:

$$L_{Fe} = \frac{1}{2} K\,(x_2^2 - x_1^2)$$

Esta expresión depende sólo de la coordenada x, se puede demostrar que para una trayectoria cerrada el trabajo de la fuerza elástica es cero. De acuerdo con la definición dada para fuerzas conservativas, la fuerza elástica es una fuerza conservativa.

Sea ahora el sistema de la figura, donde tenemos un bloque con una velocidad $\vec{v}_0$ cuando el resorte está en su posición de equilibrio.

Para la trayectoria cerrada, correspondiente al movimiento alternativo, el trabajo de la fuerza elástica es L=0 y por lo tanto $\Delta E\vec{c} = 0$ al cabo de una oscilación completa. Esto significa que cada vez que el bloque pasa por la posición x = 0 de equilibrio, posee la misma $E\vec{c}$, o sea, posee la misma velocidad.

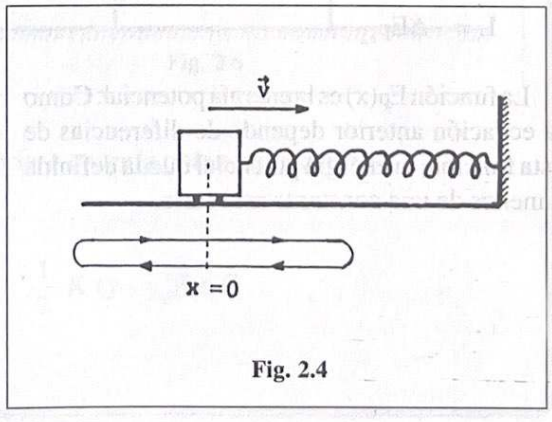


Fig. 2.4

¿Qué sucedería si hubiera rozamiento entre las superficies del bloque y del plano?

Como sabemos, la fuerza de rozamiento es, en este caso, opuesta al movimiento del cuerpo. En tal circunstancia el bloque volverá a su posición inicial con una energía cinética menor que la de partida ($\Delta Ec \neq 0$). Esto quiere decir que el trabajo de la fuerza de rozamiento en una trayectoria cerrada no es cero y por lo tanto es una fuerza **no conservativa**.

Una fuerza **conservativa** como la del resorte realiza trabajo positivo en una parte del recorrido y negativo en otra de modo tal que ambas contribuciones se compensan al considerar la trayectoria completa. De la misma manera el trabajo realizado por la fuerza de gravedad a lo largo de una trayectoria en la que se sube tanto como se baja, es cero. El trabajo de las fuerzas de rozamiento tiene el mismo signo y no puede compensarse.

2.2 ENERGIA POTENCIAL

Las fuerzas conservativas tienen la propiedad de no realizar trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada. Matemáticamente esto es equivalente a que el trabajo realizado entre dos puntos cualesquiera 1 y 2 es igual a la diferencia de una función que depende sólo de las coordenadas de esos puntos. Escribiremos esto así:

$$L = - [Ep(x_2) - Ep(x_1)]$$

$$L = - \Delta Ep_{12}$$

La función Ep(x) es la energía potencial. Como la ecuación anterior depende de diferencias de esta función, la energía potencial queda definida a menos de una constante arbitraria.

2.2.1 ENERGIA POTENCIAL GRAVITATORIA

Por lo visto en **2.1** la energía potencial gravitatoria de una partícula ubicada a una altura h sobre la superficie de la Tierra será

$$Ep(h) = m\ g\ h + C$$

donde C es la constante arbitraria que mencionamos anteriormente. Por convención podemos asignar Ep= 0 cuando la partícula está sobre la superficie, en ese caso:

$Ep(h = 0) = C = 0$ (hay otras convenciones posibles).

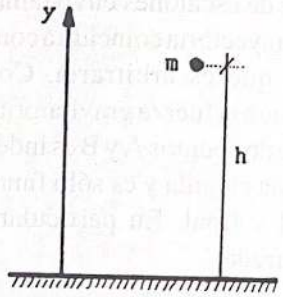


Fig. 2.5

Por ejemplo un cuerpo de masa 10 kg a una altura de 10 m sobre la superficie de la Tierra tendrá una energía potencial

$$Ep = 10\ kg\ .\ 9{,}8\ m/s^2\ .\ 10\ m =$$

$$= 980\ N\ m = 980\ J$$

La misma partícula a 5 m sobre la superficie de la Tierra tendrá

$$Ep = 490\ J$$

El trabajo de la fuerza peso cuando la partícula va del punto más alto al más bajo será

$$Lp = - [Ep(5\ m) - Ep(10\ m)] = 490\ J$$

positivo, como esperábamos, porque la partícula ganó energía cinética, y además positivo porque el desplazamiento desde el punto más alto al más bajo tiene el mismo sentido que la fuerza peso.

2.2.2 ENERGIA POTENCIAL ELASTICA

Para el caso de una fuerza elástica lineal, tendremos

$$E_p(x) = \frac{1}{2} K \Delta x^2 + C = \frac{1}{2} K (x - l_0)^2 + C$$

Si convenimos en asignar $E_p = 0$ a la posición de resorte relajado ($\Delta x = 0 \Rightarrow x = l_0$), podemos ver que $C = 0$.

Como ejemplo calculemos cuál sería la energía necesaria para comprimir un centímetro a un resorte de K = 2 N/cm.

$$E_p(x) = \frac{1}{2} \; 2 \frac{N}{cm} \; (1 \text{ cm})^2 = 0{,}01 \text{ N m} = 0{,}01 \text{ J}$$

Ejemplo 2.2:

Consideremos ahora un resorte de masa despreciable y del cual suspendemos un cuerpo de masa m. Sea y_0 la coordenada del extremo del resorte libre respecto de la superficie de la Tierra. Queremos encontrar la energía potencial de este sistema:

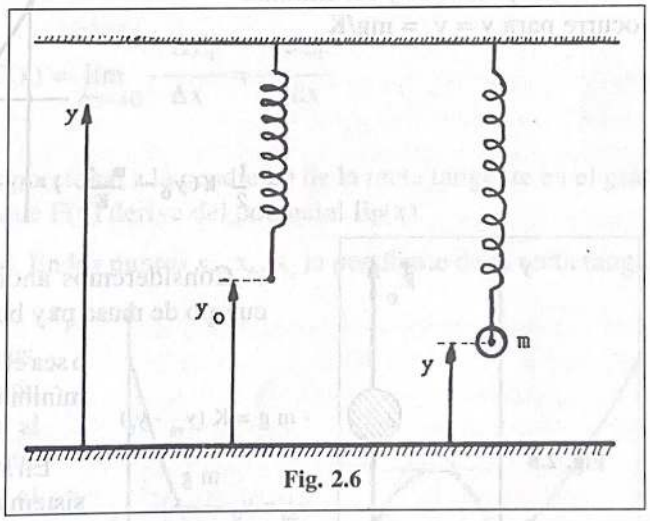


Fig. 2.6

Como las posiciones para las cuales E_p gravitatoria y E_p elástica se anulan de acuerdo a nuestra convención anterior son diferentes, es necesario elegir una posición de referencia común, dado que en este caso la energía potencial **total** es

E_p = energía potencial gravitatoria + energía potencial elástica

$$E_p = m \, g \, y + \frac{1}{2} K (y - y_0)^2 + C$$

Ejemplo 2.2:

Si elegimos arbitrariamente $E_p(y=0) = 0$ resulta,

$$0 = m\,g\,.\,0 + \frac{1}{2} K\,(-y_0)^2 + C \text{ , luego } C = -\frac{1}{2} K\,y_o^2$$

Entonces:

$$E_p = m\,g\,y + \frac{1}{2} K\,(y - y_0)^2 - \frac{1}{2} K\,y_0^2$$

que se puede reescribir de la siguiente manera

$$E_p = \frac{1}{2} K\,(y^2 - 2\,y\,y_0 + 2\,\frac{m\,g}{K}\,y + \cancel{y_0^2} - \cancel{y_0^2})$$

$$E_p = \frac{1}{2} K\,[y^2 - 2\,y\,(y_0 - \frac{m\,g}{K}) + (y_0 - \frac{m\,g}{K})^2 - (y_0 - \frac{m\,g}{K})^2]$$

$$E_p = \frac{1}{2} K\,[y - (y_0 - \frac{m\,g}{K})]^2 - \frac{1}{2} K\,(y_0 - \frac{m\,g}{K})^2$$

Es instructivo graficar E_p en función de y, que corresponde a una parábola.

Vemos que existe un mínimo de la energía potencial y ese mínimo ocurre para $y = y_0 = mg/K$.

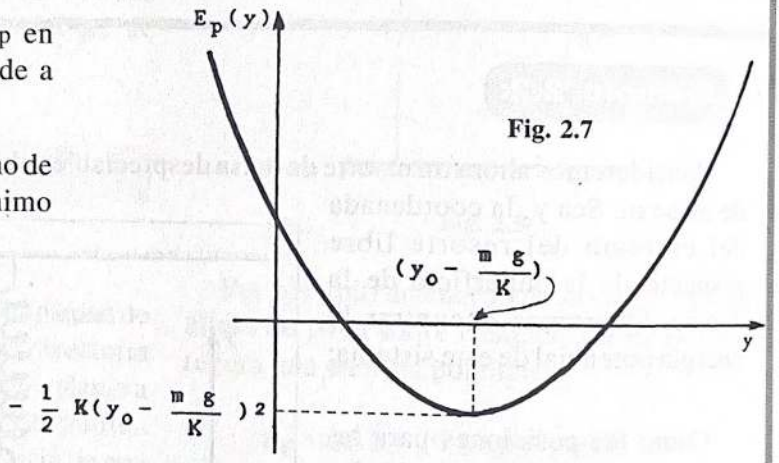


Fig. 2.7

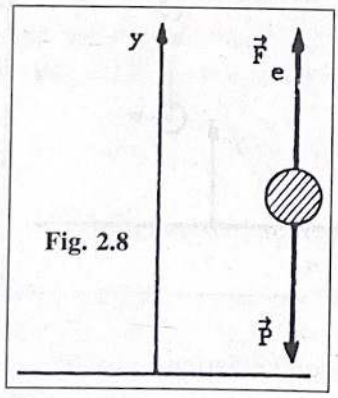


Fig. 2.8

Consideremos ahora las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa m y busquemos la posición de equilibrio.

$$-m\,g = K\,(y_{eq} - y_0)$$

$$y_{eq} = y_0 - \frac{m\,g}{K}$$

o sea el mismo valor que encontramos para el mínimo de E_p.

En su **posición de equilibrio** (estable) este sistema **minimiza su energía potencial**.

Este es un resultado de validez general: las posiciones de equilibrio corresponden a mínimos, máximos o puntos de estacionamiento del potencial, cualquiera sea éste. La demostración escapa a los objetivos de este curso. Sin embargo haremos una discusión más detallada para un potencial en una dimensión.

2.2.3 ENERGIA POTENCIAL Y FUERZAS

Consideremos un sistema cuya energía potencial $E_p(x)$ es una función cualquiera de x, en particular podría ser la de la **Fig. 2.9**

Vimos anteriormente que $\Delta L = - \Delta E_p$. Si pensamos en el trabajo realizado entre los puntos x_1, x_2 podemos definir una **fuerza media** de manera que:

$$F_{m(1,2)} (x_2 - x_1) = Ep(x_1) - Ep(x_2)$$

$$F_{m(1,2)} = \frac{Ep(x_1) - Ep(x_2)}{x_2 - x_1} = \frac{- \Delta Ep}{\Delta x}$$

que queda representada por la pendiente de la recta secante en los puntos x_1 y x_2 cambiada de signo.

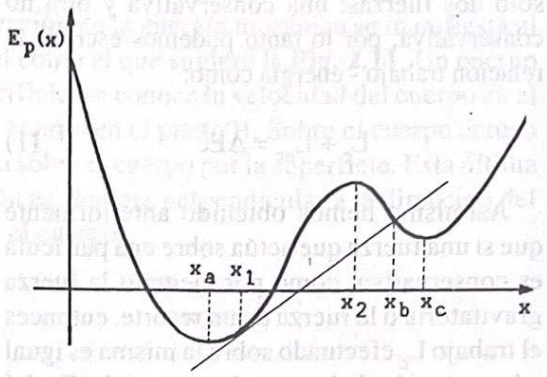


Fig. 2.9

Recordemos lo hecho en cinemática al definir velocidad y aceleración media. Con métodos análogos a los que nos permitieron definir velocidad y aceleración instantáneas, podemos obtener la fuerza F(x) - punto a punto - cuyo trabajo a lo largo de x es la variación de energía potencial (con signo menos) del sistema:

$$F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} - \frac{\Delta Ep}{\Delta x} = - \frac{dEp}{dx}$$

de donde puede verse que F(x) es proporcional a la pendiente de la recta tangente en el gráfico Ep en función de x. Es común decir que F(x) deriva del potencial Ep(x).

Analicemos el caso de la **Fig. 2.10**. En los puntos x_0, x_b, x_c la pendiente de la recta tangente es cero entonces F = 0.

En x_0, x_c la energía tiene mínimos locales, si nos apartamos un poco de esta posición la fuerza, por su sentido tiende a volver al sistema al punto de equilibrio. Decimos que estamos en **equilibrio estable**. Por el contrario, si nos alejamos de x_b, ya sea para uno u otro lado, las fuerzas tenderán a alejar al sistema de x_b; decimos entonces que estamos en **equilibrio inestable**. Puede haber puntos en los que la pendiente es cero y sin embargo no hay mínimos ni máximos, esos son los puntos de estacionamiento (el gráfico presenta carencia de ellos).

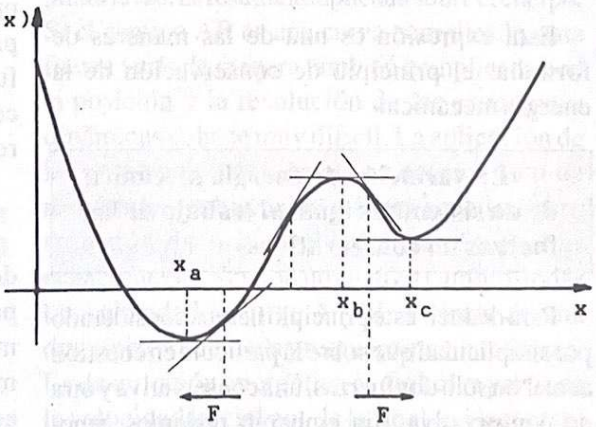


Fig. 2.10

2.3 ENERGIA MECANICA

Hemos visto una forma de clasificar las fuerzas en conservativas y no conservativas. Consideremos para simplificar que sobre una partícula actúan sólo dos fuerzas: una conservativa y otra no conservativa, por lo tanto podemos escribir la relación trabajo - energía como:

$$L_c + L_{nc} = \Delta Ec \qquad (1)$$

Asimismo hemos obtenido anteriormente que si una fuerza que actúa sobre una partícula es conservativa, como por ejemplo la fuerza gravitatoria o la fuerza de un resorte, entonces el trabajo L_c efectuado sobre la misma es igual a la variación de la energía potencial ΔEp del sistema cambiada de signo, es decir

$$L_c = - \Delta Ep$$

y por lo tanto, reemplazando en la expresión (1) obtenemos que

$$\Delta Ec + \Delta Ep = L_{nc}$$

Si definimos a la energía mecánica Em de un sistema como la suma de la energía cinética y de la energía potencial del mismo,

$$Em = Ec + Ep$$

resulta que

$$\Delta Em = L_{nc} \qquad (2)$$

Esta expresión es una de las maneras de formular el principio de conservación de la energía mecánica:

«La variación de energía mecánica de un sistema es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas»

Para deducir este principio hemos considerado por simplicidad que sobre la partícula en cuestión actuaban sólo dos fuerzas, una conservativa y otra no conservativa. Sin embargo podemos generalizar para el caso en que actúan varias fuerzas conservativas y no conservativas. Entonces la expresión (1) adopta la forma:

$$L_{c1} + L_{c2} + \ldots + L_{nc1} + L_{nc2} + \ldots = \Delta Ec$$

o bien

$$\Sigma L_{ci} + \Sigma L_{nci} = \Delta Ec \qquad (3)$$

en donde el símbolo Σ indica la suma de los trabajos realizados por las diversas fuerzas. Ahora bien, cada una de las fuerzas conservativas, como la gravedad, la fuerza elástica, la fuerza electrostática, etc., realizan trabajos que son iguales a las variaciones de energías potenciales correspondientes cambiadas de signos, o sea:

$$L_{ci} = - \Delta Ep_i$$

$$\Sigma L_{ci} = - \Sigma \Delta Ep_i$$

entonces, reemplazando en (2)

$$\Delta Ec + \Sigma \Delta Ep_i = \Sigma L_{nci}$$

El primer miembro de la expresión anterior es la variación de energía mecánica total cuando sobre una partícula actúan varias fuerzas conservativas. Entonces como

$$Em = Ec + \Sigma Ep_i$$

nos queda

$$\Delta Em = \Sigma L_{nci} \qquad (4)$$

Esta expresión es una forma más general del principio de la conservación de la energía. En particular, si sobre una partícula actúan sólo fuerzas conservativas, entonces su trabajo es cero, de modo que de las ecuaciones (2) o (4) resulta que

$$\Delta Em = 0$$

Esto significa que cualquiera sea el sistema de fuerzas conservativas actuante sobre la partícula su movimiento tiene lugar de tal manera que su energía mecánica total se mantiene constante. En muchas circunstancias esta propiedad nos permite conocer posiciones y velocidades de un sistema con sólo saber su velocidad inicial y sin resolver en detalle las ecuaciones de Newton.

2.4 APLICACIONES

Ilustraremos con diversos ejemplos el principio de conservación de la energía formulado previamente.

La verdadera utilidad del principio de conservación de la energía mecánica se manifiesta al intentar la resolución de problemas dinámicos tal como el que sugiere la **Fig. 2.11**. Un cuerpo de masa m se desliza sin rozamiento sobre la superficie; se conoce la velocidad del cuerpo en el punto A y se quiere sabe cuál es la velocidad del cuerpo en el punto B. Sobre el cuerpo actúan dos fuerzas, el peso y la fuerza de vínculo ejercida sobre el cuerpo por la superficie. Esta última es una fuerza de intensidad variable y su dirección es siempre perpendicular a la dirección del movimiento por lo tanto no realiza trabajo sobre el cuerpo.

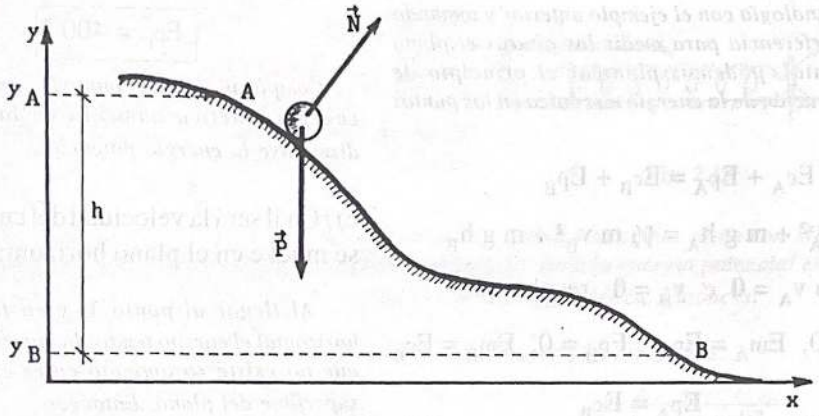


Fig. 2.13

El peso del cuerpo es una fuerza conservativa de modo que la energía mecánica se conserva, entonces tendremos

$$Em_A = Em_B$$

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + m g y_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g y_B$$

donde v_A, y_A, v_B e y_B son las velocidades y las alturas del cuerpo en las posiciones A y B respectivamente.

Por lo tanto

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2 g (y_A - y_B)}$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2 g h}$$

Observe que la ecuación anterior es independiente de la forma de la trayectoria AB y del tiempo que dure el desplazamiento. Si deseáramos resolver el problema aplicando las leyes de Newton necesitaríamos conocer punto a punto la fuerza resultante aplicada sobre el cuerpo. Si el camino AB es una curva complicada, esta fuerza varía de manera también complicada con la posición y la resolución de las ecuaciones dinámicas se hace muy difícil. La aplicación de la conservación de la energía mecánica permite resolver el problema de manera sencilla, pero sólo nos da la velocidad final en B. Las ecuaciones de Newton nos dan en cambio, todas las velocidades **entre** A y B. Se trata de una descripción detallada y requiere mayor esfuerzo. La descripción energética es **global**: a partir de la velocidad inicial nos da la final (o viceversa) pero no nos da información de los estados intermedios, ni el tiempo que insume el proceso.

Ejemplo 2.3:

Resolvamos ahora el siguiente problema: un cuerpo de masa 10 kg se deja caer desde un punto A, situado a 6 m de altura, por un plano inclinado de 30°. Luego se desplaza por un plano horizontal hasta que sube por otro plano inclinado de 45°. Despreciemos el rozamiento. Calular: **a), b), c) d).**

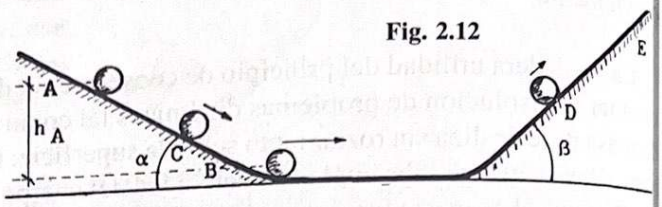


Fig. 2.12

a) ¿Cuál será la energía cinética del cuerpo en el punto B?

En analogía con el ejemplo anterior y tomando como referencia para medir las alturas el plano horizontal, podemos plantear el principio de conservación de la energía mecánica en los puntos A *y* B.

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_A^2 + m\, g\, h_A = \tfrac{1}{2}\, m\, v_B^2 + m\, g\, h_B$$

y como $\mathbf{v_A = 0}$ e $\mathbf{y_B = 0}$ resulta que

$$Ec_A = 0,\ Em_A = Ep_A\ ;\ Ep_B = 0,\ Em_B = Ec_B$$

$$\mathbf{Ep_A = Ec_B}$$

es decir que en el punto A *el cuerpo sólo tiene energía potencial mientras que en el punto* B *sólo tiene energía cinética. Podemos afirmar entonces que toda la energía potencial del cuerpo en* A *se transforma en energía cinética en* B. *Resolviendo numéricamente obtenemos*

$$Ep_A = m\, g\, h_A$$

reemplazando: $Ep_A = 10\ kg\ .\ 10\ m/s^2\ .\ 6\ m$

$$\boxed{Ep_A = 600\ J} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Ec_B = 600\ J}$$

b) ¿Cuáles serán la energía mecánica, potencial y cinética del cuerpo en el punto C situado a 2 m de altura?

La energía mecánica se conserva, por lo tanto

$$Em_C = Em_A = 600\ J$$

La energía potencial en C *es*

$$Ep_C = m\, g\, h_C\ ;\ Ep_C = 10\ kg\ .\ 10\ m/s^2\ .\ 2\ m$$

$$\boxed{Ep_C = 200\ J}$$

y la energía cinética en C *es*

$$Ec_C = Em_C - Ep_C\ ;\ Ec_C = 600\ J - 200\ J$$

$$\boxed{Ec_C = 400\ J}$$

Comparando con el punto A *vemos que en* C *la energía cinética aumenta en la medida que disminuye la energía potencial.*

c) ¿Cuál será la velocidad del cuerpo cuando se mueve en el plano horizontal?

Al llegar al punto B *y en todo el plano horizontal el cuerpo tendrá la misma velocidad ya que no existe rozamiento entre el cuerpo y la superficie del plano. Entonces.*

$$v_B = \sqrt{2\, g\, h_A}\ ;\ v_B = \sqrt{2\ .\ 10\ m/s^2\ .\ 6\ m}$$

$$\boxed{v_B = 10{,}95\ m/s}$$

d) ¿A qué altura del segundo plano inclinado se detendrá?

Sin necesidad de hacer cálculos, podemos anticipar que el cuerpo llegará a la misma altura que aquélla desde la que fue soltado.

Por conservación de energía mecánica en el punto D ($y_D = 0$) *el cuerpo tiene*

$$Em_D = Ec_D = 600\ J$$

y en el punto E *donde se detendrá* $v_E = 0$ *entonces*

$$Em_E = Ep_E = m\, g\, h_E$$

$$h_E = \frac{600\ J}{10\ kg\ .\ 10\ m/s^2}$$

$$\boxed{h_E = 6\ m}$$

Ejemplo 2.4:

A un resorte lineal cuya constante elástica K es 5 N/cm se lo comprime 3 cm a partir de su longitud relajada. Se le apoya una pelotita de 0,2 kg. Si suponemos que el resorte está horizontal y no hay rozamiento entre la pelotita y la superficie de apoyo, ¿cuál será la velocidad que adquiere la pelotita si se descomprime el resorte, cuando pasa por la posición de equilibrio del resorte?

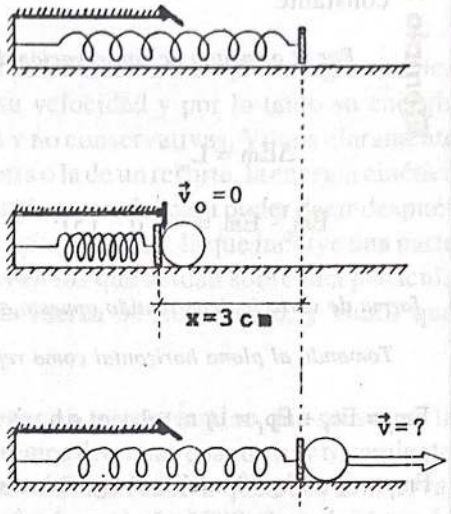


Fig. 2.13

Sabemos que la fuerza elástica es conservativa y por lo tanto la energía mecánica se conserva durante el proceso de descompresión del resorte. La energía mecánica inicial es igual a la energía potencial del resorte 1/2 K x² y la energía mecánica final es igual a la energía cinética de la pelotita 1/2 m v². Como se nos pide la velocidad de la pelota en la posición de equilibrio del resorte, observemos que mientras éste se halla comprimido ejerce una fuerza sobre la pelota, incrementando así su energía cinética.

Al llegar a la posición de equilibrio, la fuerza elástica se anula y la pelota sigue con MRU con la velocidad que tiene en ese instante, desvinculándose del resorte. Toda la energía potencial elástica del resorte se ha transferido en este proceso a la pelota como energía cinética. Entonces,

$E_{p_e} = E_c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} m v^2$ *sustituyendo unidades:*

despejando la velocidad: $v = \sqrt{(K/m)}\, x$

$$v = \sqrt{\frac{5 \text{ kg m/s}^2}{0{,}2 \text{ kg} \,.\, 0{,}01 \text{ m}}} \,.\, 0{,}03 \text{ m}$$

reemplazando: $v = \sqrt{\frac{5 \text{ N/cm}}{0{,}2 \text{ kg}}} \,.\, 3 \text{ cm}$

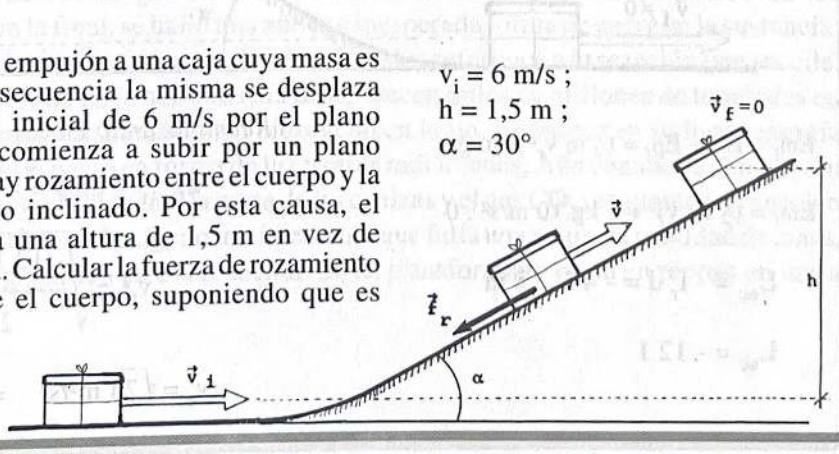
$$\boxed{v = 1{,}5 \text{ m/s}}$$

Consideremos ahora el siguiente problema que involucra **fuerzas no conservativas.**

Ejemplo 2.5:

Un hombre da un empujón a una caja cuya masa es de 4 kg. Como consecuencia la misma se desplaza con una velocidad inicial de 6 m/s por el plano horizontal. Luego comienza a subir por un plano inclinado de 30°. Hay rozamiento entre el cuerpo y la superficie del plano inclinado. Por esta causa, el cuerpo se detiene a una altura de 1,5 m en vez de detenerse más arriba. Calcular la fuerza de rozamiento $\vec{f}_r$, que actúa sobre el cuerpo, suponiendo que es constante.

$v_i = 6$ m/s ;
$h = 1{,}5$ m ;
$\alpha = 30°$



Ejemplo 2.5: **a)** Calcular la fuerza de rozamiento $\vec{f}_r$ que actúa sobre el cuerpo, suponiendo que es constante

Por el principio de conservación de la energía tenemos que,

$$\Delta Em = L_{nc}$$

$$Em_f - Em_i = - f_r\, d \quad (5)$$

donde Em_f *y* Em_i *son las energías mecánicas final e inicial respectivamente, d es el desplazamiento del cuerpo sobre el plano inclinado y el signo menos del segundo miembro se debe a que al calcular el trabajo de la fuerza de rozamiento la dirección de ésta es de 180° respecto de la dirección del desplazamiento* (cos 180° = -1), *o si se prefiere esta otra forma de verlo fr tiene sentido opuesto al desplazamiento.*

Tomando al plano horizontal como referencia para la energía potencial gravitatoria, tenemos que,

$Em_f = Ec_f + Ep_f = ½\ m\ v_f^2 + m\ g\ h$

$Em_f = ½ \cdot 4\ kg\ (0\ m/s)^2 + 4\ kg \cdot 10\ m/s^2 \cdot 1{,}5\ m$

$Em_f = 60\ J$

$Em_i = Ec_i + Ep_i = ½\ m\ v_i^2 + m\ g\ h$

$Em_i = ½ \cdot 4\ kg\ (6\ m/s)^2 + 4\ kg \cdot 10\ m/s^2 \cdot 0\ m$

$Em_i = 72\ J$

$d = \dfrac{h}{\text{sen } 30°} \qquad d = \dfrac{1{,}5\ m}{0{,}5} \qquad d = 3\ m$

Reemplazando en (5) $60\ J - 72\ J = - f_r \cdot 3\ m$

$\boxed{f_r = 4\ N}$

b) ¿Cuál será la velocidad del cuerpo al pie del plano inclinado, cuando retorne? (Si es que retorna)

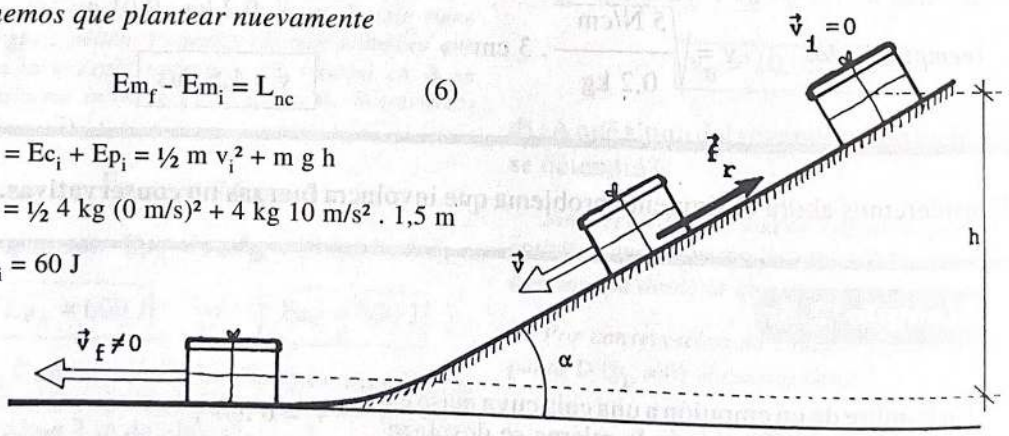
Tenemos que plantear nuevamente

$$Em_f - Em_i = L_{nc} \qquad (6)$$

$Em_i = Ec_i + Ep_i = ½\ m\ v_i^2 + m\ g\ h$

$Em_i = ½\ 4\ kg\ (0\ m/s)^2 + 4\ kg\ 10\ m/s^2 \cdot 1{,}5\ m$

$Em_i = 60\ J$



$Em_f = E_{cf} + Ep_f = ½\ m\ v_f^2 + m\ g\ h$

$Em_f = ½\ kg\ v_f^2 + 4\ kg\ 10\ m/s^2 \cdot 0$

$L_{nc} = - f_r\, d = - 4\ N \cdot 3\ m$

$L_{nc} = - 12\ J$

Reemplazando en (6)

$kg\ v_f^2 - 60\ J = - 12\ J$

$v_f^2 = \sqrt{\dfrac{- 12\ J + 60\ J}{2\ kg}}$

$v_f = \sqrt{24\ m^2/s^2} \Rightarrow \boxed{v_f = 4{,}9\ m/s}$

2.5 LA ENERGIA Y SU CONSERVACION

De lo analizado en los capítulos previos, podemos ver que de la relación trabajo - energía cinética se deduce que una partícula libre de fuerzas conserva su velocidad y por lo tanto su energía cinética. Luego clasificamos las fuerzas en conservativas y no conservativas. Vimos claramente que al actuar sobre una partícula fuerzas como la gravitatoria o la de un resorte, la energía cinética no se conserva, entonces introdujimos el concepto de energía potencial para poder decir después que lo que se conserva no es la energía cinética sino la energía mecánica, la que incluye una parte cinética y otra potencial. También hemos discutido casos en los que actúan sobre una partícula fuerzas no conservativas, en particular tratamos el de la fuerza de rozamiento, y vimos que tampoco se conserva la energía mecánica.

¿Y si ampliáramos la definición de energía para agregar un tercer término que no sea ni la cinética ni la potencial? Quizás, si resulta este intento, podremos decir que cuando hay rozamiento u otras fuerzas no conservativas, hay una energía que no es la mecánica que sí se conserva. Precisamente eso es lo que sucedió cuando el conde Rumford, en el año 1798, descubrió que la energía **perdida** se transformaba en calor. Podríamos así escribir que se conserva la siguiente suma:

Energía cinética + Energía potencial + Energía térmica (o calórica)

Los trabajos de James Joule, a mediados del siglo XIX, permitieron encontrar la manera cuantitativa en que equivalen una y otra forma de energía mecánica y calórica (o térmica).

Sin embargo, no todo termina con esas tres clases de energías: hay procesos, como por ejemplo la carga de una batería eléctrica, en los que no coincide el balance de energía mecánica y térmica. Si se desea **salvar** al principio de conservación de la energía, es necesario seguir inventando términos: energía eléctrica, energía química, y así, al parecer, indefinidamente.

Lo curioso es que esas invenciones no son arbitrarias: son formas de energía que realmente existen, y que pueden ser transformadas una en otra. Siempre se convierten en la misma proporción, por lo que puede afirmarse con propiedad que la energía no aparece ni desaparece, a lo sumo se transforma en otras clases de energía.

En 1939, cuando se descubrió que en ciertas reacciones nucleares la masa inicial de los reactivos no coincidía con la final, se halló una nueva e inesperada forma de energía: la sustancia. La sustancia puede transformarse, por ejemplo, en calor. Nos referimos a la reacción que sucede, por ejemplo, en el Sol, estrella en la que cada día desaparecen miles de millones de toneladas en el balance de las reacciones que transforman hidrógeno en helio, y aparece en su lugar energía térmica que es irradiada al espacio en forma de luz y otras radiaciones. Aún cuando se consideren la combustión del carbón con el oxígeno, la masa de las cenizas y el gas CO_2 resultante no cancelan exactamente con la del carbón y el oxígeno iniciales, sino que falta una pequeña cantidad de masa, que es la masa del calor generado en esa reacción. Se ha transformado masa en reposo en masa irradiada.

2.5.1 EQUIVALENCIA MASA - ENERGIA

La conservación de la masa y la conservación de la energía son dos principios fundamentales en los cuales se cimentaron la química y la física moderna. Fue Albert Einstein quien al formular la teoría de la relatividad fundió en un sólo principio a ambas leyes, las cuales parecían ser independientes. Según esta teoría, al aumentar la velocidad v de una partícula, aumenta su masa m y por lo tanto es necesario redefinir a la masa como

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

en donde m_0 es la masa de la partícula que se mide en un referencial en reposo respecto de ella, y c es la velocidad de la luz, cuyo valor es aproximadamente 3×10^8 m/s. Con esta nueva definición de la masa sigue teniendo validez la segunda ley de Newton. De acuerdo con los resultados de la teoría de Einstein, la energía mecánica de una partícula libre ya no adopta la expresión $(1/2)\, m_0\, v^2$, sino que es

$$E = m\, c^2,$$

donde m está dada por la expresión (1). Así una partícula en reposo y que no está sometida a ninguna fuerza tiene, según la relatividad una energía de reposo

$$E_0 = m_0\, c^2,$$

que podría irradiarse, si se produce la reacción adecuada.

En ciertos fenómenos nucleares en donde se pone más en evidencia la mecánica relativista, por ejemplo, la aniquilación de un electrón con un positrón (partícula análoga al electrón pero con carga positiva en vez de negativa). En este proceso desaparecen ambas partículas y se emiten dos rayos gamma que se propagan en sentidos opuestos con una energía electromagnética igual a la suma de las masas en reposo del electrón y del positrón multiplicada por la velocidad de la luz al cuadrado. Inversamente, puede ocurrir que en condiciones adecuadas se produzca la creación de un par electrón - positrón, al absorberse un rayo gamma con suficiente energía. Otro ejemplo es el de la formación de un deuterón (isótopo pesado del hidrógeno) a partir de la fusión de un protón y un neutrón. Las masas de un protón, un neutrón y un deuterón son 1,00783; 1,00867 y 2,01410 unidades de masa atómica. Una unidad de masa atómica equivale a $1{,}66 \times 10^{-27}$ Kg. Vemos que la masa del deuterón es menor que la suma de las masas del protón y del neutrón, la diferencia es 0,0024 unidades de masa atómica, lo cual equivale a una energía

$$E = \Delta m\, c^2 = 0{,}0024 \,.\, 1{,}66\ 10^{-27}\ \text{Kg} \,.\, (3\ 10^8\ \text{m/s})^2$$

$$E = 3{,}59\ 10^{-13}\ \text{J} = 2{,}23\ \text{Mev}$$

Esta energía se emite en forma de radiación electromagnética gamma.

Nota: Muchas veces resulta poco práctico el uso de las unidades del SI. En particular mencionamos el uso del Angstrom (Å) para medir longitudes en el campo atómico. De la misma manera resulta útil contar con una unidad de energía apropiada a la física atómica y nuclear. Definimos entonces

el electrón - Volt: $1\ eV = 1{,}602\ 10^{-14}\ J$

y sus múltiplos

el kilo electrón - Volt: $1\ KeV = 10^3\ eV$

el mega electrón - Volt: $1\ MeV = 10^6\ eV$